


**15ª OLIMPIÁDA BRASILEIRA
DE MATEMÁTICA
DAS ESCOLAS PÚBLICAS**
OBMEP 2019

Nível
Ensino Médio

3

setembro de 2019

2ª FASE – 28 de setembro de 2019

Assinatura

www.facebook.com/obmep

Preencha
e confira
os dados
acima com
muita atenção!

1. Verifique se os dados da etiqueta desta prova estão corretos. Caso as informações não estejam corretas, comunique o erro ao aplicador imediatamente.
2. Preencha cuidadosamente todos os seus dados no quadro acima. Utilize letra de forma, colocando uma letra/dígito em cada quadrado e deixando um espaço em branco entre cada palavra.
3. Lembre-se de assinar o quadro acima e a lista de presença.
4. A prova pode ser feita a lápis ou a caneta.
5. A duração da prova é de 3 horas. Você só poderá deixar a sala de prova 45 minutos após o início da prova. Ao terminar a prova, entregue-a ao aplicador.
6. A solução de cada questão deve ser escrita na página reservada para ela, de maneira organizada e legível. Evite escrever as soluções na folha de rascunho.
7. Na correção serão considerados todos os raciocínios que

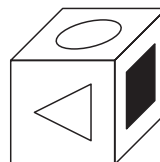
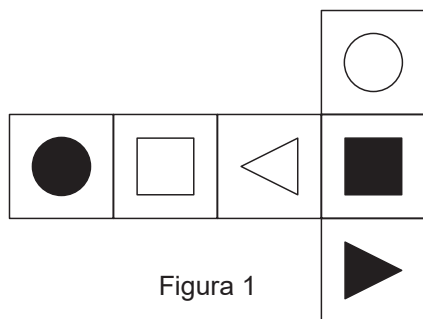
você apresentar. Tente resolver o maior número possível de itens de todas as questões, principalmente o item (a) de cada questão.

8. Respostas sem justificativas não serão consideradas na correção.
9. Não escreva nos espaços sombreados.
10. Não é permitido:
 - a. usar instrumentos de desenho, calculadoras ou qualquer fonte de consulta;
 - b. comunicar-se com outras pessoas, além do aplicador de provas;
 - c. usar quaisquer aparelhos eletrônicos (celulares, *tablets*, relógios com calculadora, máquinas fotográficas etc.).O não cumprimento dessas regras resultará em sua desclassificação.

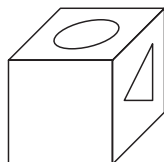
Boa prova!

[illegible]

1. A Figura 1 é uma planificação de um cubo. Fazendo as dobras necessárias e colando as arestas soltas, obtemos o cubo da Figura 2.

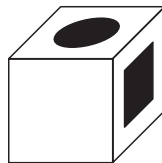
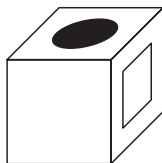


a) Em uma outra vista do mesmo cubo, mostrada abaixo, está faltando o desenho na face da frente. Faça esse desenho.



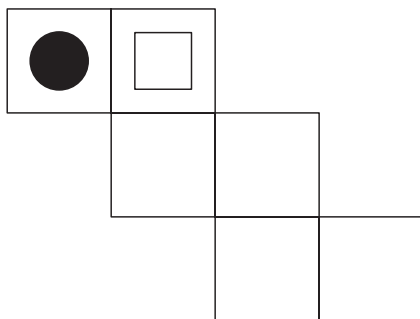
Correção Regional	Correção Nacional
----------------------	----------------------

b) Abaixo temos outras duas vistas do mesmo cubo, cada uma com a face da frente sem desenho. Faça os desenhos que faltam nessas faces.



Correção Regional	Correção Nacional
----------------------	----------------------

c) Abaixo temos uma outra planificação de um cubo. Faça, nessa planificação, os desenhos que estão faltando.



Correção Regional	Correção Nacional
TOTAL Correção Regional	TOTAL Correção Nacional

2. A calculadora de Dario tem uma tecla especial. Se um número n diferente de 2 está no

visor e ele aperta a tecla especial, aparece o número $\frac{2 \times n}{n-2}$. Por exemplo, se o número 3

está no visor, ao apertar a tecla especial, aparece o número 6, pois $\frac{2 \times 3}{3-2} = 6$.

a) Se o número 6 está no visor, qual é o número que aparecerá se a tecla especial for apertada?



Correção
Regional

Correção
Nacional

b) Explique por que, ao apertar duas vezes a tecla especial, Dario sempre obtém o número que estava inicialmente no visor.

Correção
Regional

Correção
Nacional

c) Para quais valores no visor Dario obtém o mesmo número ao apertar a tecla especial uma única vez?

Correção
Regional

Correção
Nacional

d) Qual é o número que nunca será obtido ao apertar a tecla especial?

Correção
Regional

Correção
Nacional

TOTAL

Correção
Regional

Correção
Nacional

3. As amigas Ana, Beatriz, Cláudia e Diana têm uma bola cada uma. Quando toca um sinal, cada menina escolhe, ao acaso, uma de suas três amigas para jogar sua bola.

a) Qual é a probabilidade de que Ana receba três bolas?

Correção
RegionalCorreção
Nacional

b) Qual é a probabilidade de que Ana receba exatamente duas bolas?

Correção
RegionalCorreção
Nacional

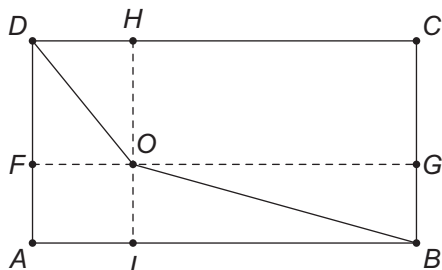
c) Qual é a probabilidade de que cada menina receba uma bola?

Correção
RegionalCorreção
Nacional

TOTAL

Correção
RegionalCorreção
Nacional

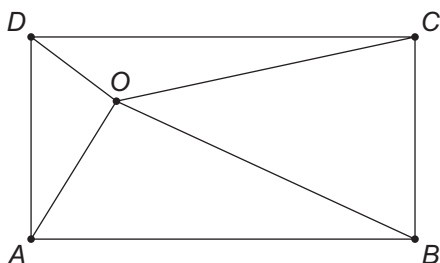
4. a) Na figura abaixo, o ponto O no interior do retângulo $ABCD$ é tal que $OF = 2$, $OG = 6$, $OH = 3$ e $OI = 1$. Os segmentos FG e HI são paralelos aos lados AB e BC , respectivamente. Calcule $OB^2 + OD^2$.



Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

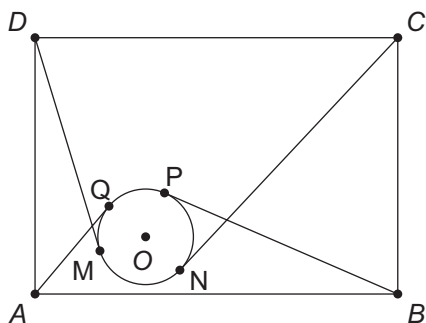
- b) Seja O um ponto qualquer no interior de um retângulo $ABCD$, como na figura abaixo. Mostre que

$$OA^2 + OC^2 = OB^2 + OD^2.$$



Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

- c) Na figura abaixo, $ABCD$ é um retângulo e os segmentos AQ , BP , CN e DM são tangentes ao círculo de centro O . Se $CN = 10$, $BP = 8$ e $DM = 7$, determine o comprimento de AQ .



Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

TOTAL

Correção Regional	Correção Nacional
-------------------	-------------------

5. Um tabuleiro preenchido com as letras A, B, C e D é *bacana* se essas quatro letras aparecem em qualquer quadriculado 2×2 do tabuleiro. Por exemplo, dos tabuleiros abaixo, o da esquerda é bacana e o da direita não é bacana.

C	D	C
A	B	A
C	D	C

C	B	C
C	D	A
A	C	B

a) Preencha os tabuleiros abaixo de modo que eles sejam bacanas e diferentes entre si.

A	B	
C	D	

A	B	
C	D	

A	B	
C	D	

Correção
RegionalCorreção
Nacional

b) Quantos tabuleiros bacanas 2×8 existem?

Correção
RegionalCorreção
Nacional

c) Quantos tabuleiros bacanas 8×8 existem?

Correção
RegionalCorreção
Nacional

TOTAL

Correção
RegionalCorreção
Nacional

6. Seis livros, numerados de 1 a 6, estão inicialmente distribuídos entre seis pessoas A, B, C, D, E e F, respectivamente. Cada uma delas pode trocar seu livro com o de outra pessoa uma única vez por dia. A tabela abaixo mostra um exemplo de possíveis trocas de livros entre as pessoas em dois dias. No 1º dia, as pessoas A e D, bem como B e E, trocaram livros entre si, e C e F não trocaram seus livros. No 2º dia, somente A e C trocaram livros entre si.

Distribuição de livros	A	B	C	D	E	F
No início	1	2	3	4	5	6
Após o 1º dia	4	5	3	1	2	6
Após o 2º dia	3	5	4	1	2	6

 Trocas: A ↔ D e B ↔ E
 Trocas: A ↔ C

Observe que, após o 2º dia, ocorreu a seguinte distribuição de livros:

- o livro que estava com A ficou com D, o livro que estava com D ficou com C, e o livro que estava com C ficou com A;
- o livro que estava com B ficou com E, e o livro que estava com E ficou com B;
- o livro que estava com F ficou com ele mesmo.

a) Complete a tabela abaixo de acordo com as trocas indicadas:

Distribuição de livros	A	B	C	D	E	F
No início	1	2	3	4	5	6
Após o 1º dia						
Após o 2º dia						

 Trocas: B ↔ D
 Trocas: A ↔ B e C ↔ E

Correção
Regional

Correção
Nacional

b) Indique uma maneira de fazer as trocas para chegar na distribuição após o 2º dia indicada na tabela abaixo.

Distribuição de livros	A	B	C	D	E	F
No início	1	2	3	4	5	6
Após o 1º dia						
Após o 2º dia	6	1	2	3	4	5

 Trocas: _____
 Trocas: _____

Correção
Regional

Correção
Nacional

c) Explique por que sempre é possível, em dois dias, fazer trocas e obter qualquer distribuição de livros entre as seis pessoas.

Correção
Regional

Correção
Nacional

TOTAL

Correção
Regional

Correção
Nacional

RASCUNHO

Operacionalização:

 Fundação
Carlos Chagas