15ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS
OBMEP 2019
Somando novos talentos para o Brasil

Nível 2

8.º e 9.º anos do Ensino Fundamental

1.ª Fase – 21 de maio de 2019

Solução da prova da 1.ª Fase

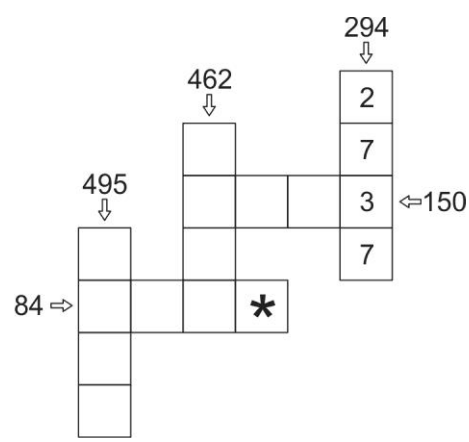
QUESTÃO 1
ALTERNATIVA E
Os valores das expressões são: A) 8, B) 11, C) 11, D) - 7 e E) - 8. Portanto, a expressão com o menor valor é a que está na letra E.

QUESTÃO 2
ALTERNATIVA C
Vamos pensar nas netas como as letras A, B, C, D e E e descrever a ordem em que elas chegaram como uma sequência dessas letras, lida da esquerda para a direita. O enunciado nos diz que nessa sequência

1. o B está à esquerda do A (Beatriz chegou antes de Ana);
2. o B está à direita do D (Beatriz chegou depois de Daniela);
3. o bloco CDE aparece sem letras intermediárias e com as letras nessa ordem (Cláudia, Daniela e Érica chegaram uma em seguida da outra, nessa ordem).

As informações 2 e 3 mostram que o B aparece à direita do bloco CDE, e a informação 1 diz que o A está à direita do B. A nossa sequência é, então, CDEBA, e concluímos que a primeira a chegar foi Cláudia.

QUESTÃO 3
ALTERNATIVA A
Inicialmente, observamos que as decomposições em fatores primos dos números que aparecem no enunciado são:
462 = 2.3.7.11
150 = 2.3.5.5
495 = 3.3.5.11
84 = 2.2.3.7
Na interseção de 150 com 462, deve aparecer o 2, pois o 3 já está na interseção de 150 com 294.
A interseção de 495 com 84 deve ser preenchida com o 3, pois é o único fator primo comum entre esses dois números. Desta forma, sobra o 7 para a interseção de 462 com 84.
Então, como a fatoração do 84 é 3 . 2 . 7 . 2, concluímos que $*$ = 2.



QUESTÃO 4
ALTERNATIVA B
A figura 1 é formada por 5 bolinhas em formato de Y e, a partir dela, quando passamos de uma figura para a seguinte, a próxima figura tem 3 bolinhas acrescidas, sendo uma em cada ponta do Y. Logo, a 15ª figura terá $5 + 3 \times 14 = 47$ bolinhas.
Mais geralmente, a quantidade de bolinhas na n-ésima figura é 5 + 3 (n – 1) = 3 n + 2.

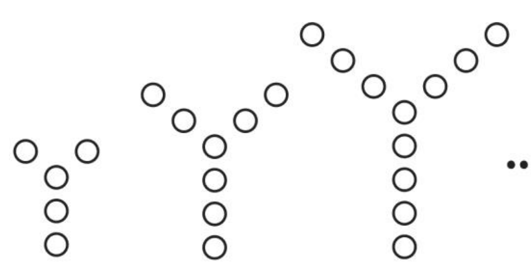


Figura 1 Figura 2 Figura 3

QUESTÃO 5
ALTERNATIVA C
Pensemos assim: se todo habitante da cidade que possui dois celulares doasse um deles para quem não tem celular (somente um celular para quem não tem nenhum), todos passariam a ter um celular cada. Como o número de pessoas que moram na cidade é 3000, há, portanto, 3000 celulares em Quixajuba.

QUESTÃO 6
ALTERNATIVA E
Vamos encontrar primeiramente o número de convidados. Chamemos esse número de *n*. Assim, pelo enunciado, *n* deixa resto 1 quando dividido por 6, 7 ou 8. Como o mínimo múltiplo comum de 6, 7 e 8 é 168, o número de convidados é $n = 169$, já que $169 < 200$. Se distribuirmos 169 pessoas em mesas com 9 lugares, restarão 7 pessoas, pois 169 dividido por 9 deixa resto 7.

QUESTÃO 7
ALTERNATIVA E
Digamos que o preço da camiseta é X. Após o primeiro desconto, passa a ser X – 0,1X = 0,9X. Após o segundo desconto, passa para 0,9X – 0,2(0,9X) = 0,9X – 0,18X = 0,72X. Como esse preço final é R$ 36,00, temos

$$0{,}72X = 36 \rightarrow X = 36/0{,}72 = 50.$$

O preço original da camiseta era, portanto, R$ 50,00.

QUESTÃO 8
ALTERNATIVA A
Reescrevendo as frações da equação com um mesmo denominador comum e cancelando esse denominador, temos:

$$\frac{a}{11}+\frac{\mathrm{b}}{3}=\frac{31}{33} \Leftrightarrow \frac{3a}{33}+\frac{11b}{33}=\frac{31}{33} \Leftrightarrow 3a+11b=31$$

Logo, como a e b são um inteiros positivos, b só pode assumir os valores 1, 2, senão o primeiro membro da última igualdade seria maior do que 31. Temos as seguintes possibilidades:

- $b = 1 \Rightarrow 3a + 11 = 31 \Rightarrow 3a = 20$, impossível, pois a é inteiro.
- $b = 2 \Rightarrow 3a + 22 = 31 \Rightarrow 3a = 9 \Rightarrow a = 3$.

Assim, $a = 3$, $b = 2$ e, portanto, $a + b = 5$.

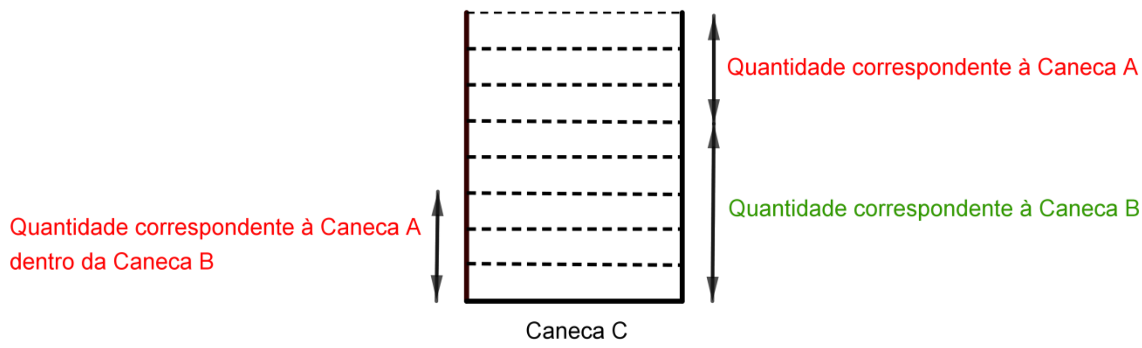
QUESTÃO 9
ALTERNATIVA B
Um número divisível quatro vezes consecutivas por 2 é divisível por $2\times2\times2\times2=2^4=16$.
Como o resultado, após essas divisões, deve ser ímpar, esse número é da forma 16.*I*, sendo *I* um número ímpar. Sabendo que 16 × 7 = 112 é o primeiro múltiplo de 16 com 3 algarismos e que 16 × 62 = 992 é o último, a quantidade de números tetrapares com 3 algarismos é igual à quantidade de números ímpares de 7 a 62, incluindo o 7.

Logo, são $\frac{62-6}{2}=28$ números tetrapares com 3 algarismos.

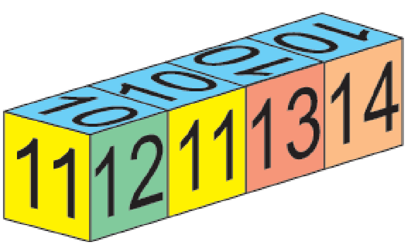
QUESTÃO 10
ALTERNATIVA D
Ao despejar o conteúdo das canecas A (pequena) e B (média) cheias na Caneca C (grande) será ocupado

$$\frac{5}{8}+\frac{3}{5}\times\frac{5}{8}=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}=1$$

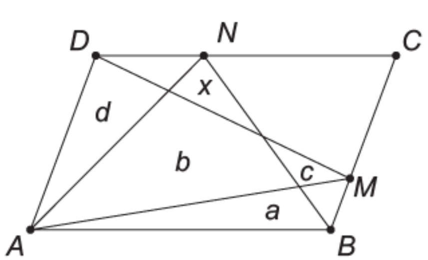
da capacidade da Caneca C, ou seja, ela ficará totalmente cheia, sem transbordar. De forma ilustrativa, dividindo a Caneca C em 8 partes iguais, a figura a seguir mostra que 5 dessas partes correspondem à capacidade da Caneca B, e as outras 3, à capacidade da Caneca A.



QUESTÃO 11
ALTERNATIVA D
A ilustração nos permite concluir que os números escritos nas quatro faces que compartilham um lado com a face de número 10 são: 11, 12, 13 e 14. Observando as rotações do número 10, podemos concluir que 11 é oposto a 14 e 12 oposto ao 13. Mais precisamente, 13 é o número que está mais próximo do algarismo 1 do número 10, e 12 o que está mais próximo do algarismo 0. Assim, a soma dos números das faces em contato é 14 + 13 + 12 + 14 + 11 + 12 = 76.



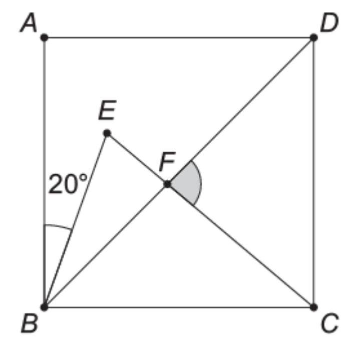
QUESTÃO 12
ALTERNATIVA A
O triângulo *ABN* tem base *AB* igual à do paralelogramo e altura relativa a essa base igual à altura do paralelogramo relativa a essa mesma base. Portanto, a área de *ABN* (que é igual a $a + b + x$) é igual à metade da área do paralelogramo. Do mesmo modo, a área de *ADM* (igual a $d + b + c$) é também igual à metade da área do paralelogramo.
Logo, $a + b + x = d + b + c$ e, daí, $x = c + d – a$.



QUESTÃO 13
ALTERNATIVA C
Um aluno pode acertar de 1 a 4 questões ou errar todas. A média é dada por
$0{,}05\times1+0{,}40\times2+0{,}25\times3+y\times4=2$,
em que y representa a porcentagem de alunos que acertou 4 questões. Note que incluir o zero não altera a média. Temos que $y=0{,}10$, ou seja, 10% dos alunos acertaram 4 questões e, portanto, 100% - (5%+40%+25%+10%) = 20% dos alunos erraram todas as questões.

QUESTÃO 14
ALTERNATIVA B

Temos $90° = \widehat{ABC} = \widehat{ABE} + \widehat{EBC} = 20° + \widehat{EBC}$ e, então, $\widehat{EBC} = 70°$; como o triângulo *CBE* é isósceles de base *BE*, temos também $\widehat{BEC} = 70°$. Por outro lado, temos $\widehat{DBC} = 45°$, pois *BD* é diagonal do quadrado; de $70° = \widehat{EBF} + \widehat{FBC} = \widehat{EBF} + 45°$ segue então que $\widehat{EBF} = 25°$. Como a soma dos ângulos de um triângulo é $180°$ e no triângulo *EBF* já temos os ângulos $\widehat{BEC} = 70°$ e $\widehat{EBF} = 25°$, segue que $\widehat{BFE} = 180° - (25° + 70°) = 85°$. Finalmente, os ângulos $\widehat{BFE}$ e $\widehat{CFD}$ são opostos pelo vértice, logo, iguais. Assim, $\widehat{DFC} = 85°$.



QUESTÃO 15
ALTERNATIVA C

Considerando que os cinco dias foram escolhidos ao acaso e, com base nos dados da tabela, podemos concluir sobre as afirmações:

A) É falsa, pois há mais de cinco dias em que Flávia estudou um número de horas diferente de 5 horas. Nos dias escolhidos ao acaso, o número de horas estudadas por dia poderia ser, por exemplo, 3h, 3h, 7h, 7h e 9h.

B) É falsa, pois entre os dias escolhidos podem estar, por exemplo, o dia em que ela estudou 9h e um dia em que ela estudou 7h e somente esses dois dias já somam mais do que 15 horas estudadas.

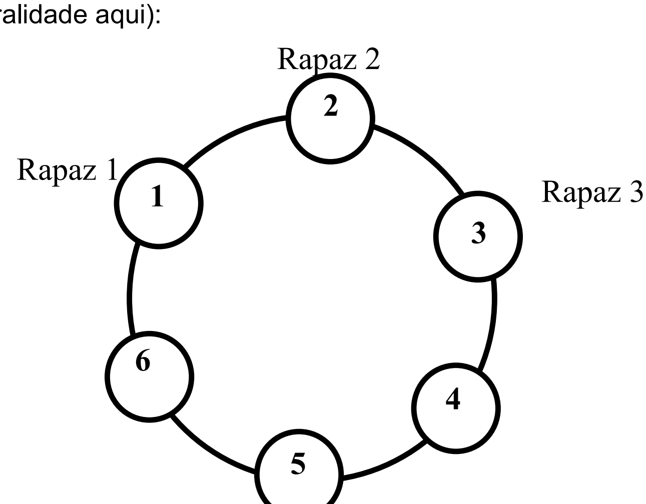
C) É verdadeira. Os dias escolhidos podem ser exatamente aqueles nos quais Flávia estudou o maior número de horas por dia: um dia de 9h, dois dias de 7h e dois dias de 5h, totalizando $1 \times 9 + 2 \times 7 + 2 \times 5 = 33$ horas.

D) É falsa, pois a soma dos números de horas estudadas nos cinco dias pode ser menor do que 20 horas, por exemplo, cinco dias de 3h por dia. Neste caso a soma das horas estudadas é 15.

E) É falsa, pelo mesmo motivo anterior: a soma dos números de horas estudadas nos cinco dias pode ser menor do que 16 horas, por exemplo, cinco dias de 3h por dia. Nesse caso, a soma das horas estudadas é 15, menor do que 16 horas.

QUESTÃO 16
ALTERNATIVA D

Os rapazes devem se sentar juntos ao redor da mesa; escolhemos primeiramente três posições vizinhas e a ordem dos rapazes nas posições escolhidas: isso pode ser feito de 6 x 6 = 36 modos diferentes. Fixemos uma dessas escolhas. Para raciocinar, digamos que foi escolhida a seguinte acomodação para os rapazes (observe que não há perda de generalidade aqui):

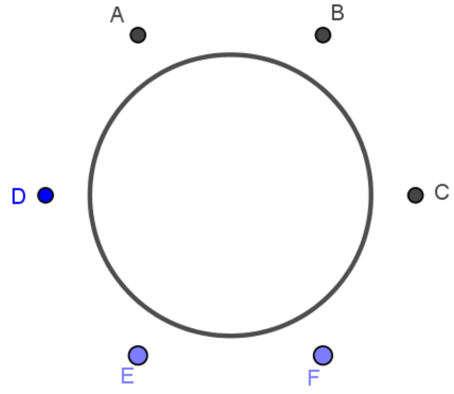


Vamos pensar na acomodação das moças. Na cadeira de número 6 não deve se sentar a namorada do rapaz 1 e, assim, há dois casos a considerar:

- Na cadeira 6 senta-se a moça que namora o rapaz 2. Nesse caso, como na cadeira 4 não deve se sentar a moça que namora o rapaz 3, há somente uma possibilidade de acomodação das moças. Fazendo variar a posição dos rapazes, há, portanto, um total de 1 x 36 = 36 possibilidades.
- Na cadeira 6 senta-se a moça que namora o rapaz 3. As cadeiras 4 e 5 podem ser usadas pelas namoradas dos rapazes 1 e 2 (duas possibilidades). Fazendo variar a posição dos rapazes, há, portanto, um total de 2 x 36 = 72 possibilidades.

Somando os dois casos acima, concluímos que há 36 + 72 = 108 possibilidades de ocupar as cadeiras, de acordo com as exigências do enunciado.

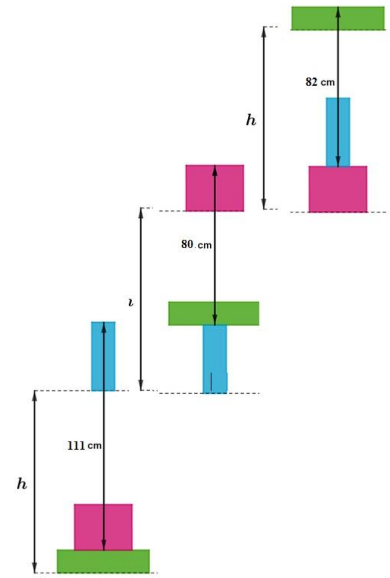
OUTRA SOLUÇÃO:
Pensando primeiramente no trio de homens, chamaremos o que fica entre os outros dois de “homem central” e os outros dois de “homem da direita” e “homem da esquerda”.
Em qual cadeira ficará o homem central? 6 possibilidades.
Qual será o homem central? 3 possibilidades.
Qual será o homem da direita? 2 possibilidades.
Qual será o homem da esquerda? 1 possibilidade.
Após posicionados os homens, vamos chamá-los de A, B e C, e as respectivas namoradas de A’, B’ e C’.



Basta decidir agora em qual cadeira B’ (namorada do homem central) se sentará, pois, após ela se sentar, as posições das outras namoradas ficarão amarradas.
Qual será a posição de B’? 3 possibilidades.
Qual será a posição de A’? 1 possibilidade.
Qual será a posição de C’? 1 possibilidade.
Assim, o número de maneiras de arrumar os 3 casais nas condições estabelecidas é:

$$N = 6 \times 3 \times 2 \times 1 \times 3 \times 1 \times 1 = 108.$$

QUESTÃO 17
ALTERNATIVA D



Representando graficamente as três situações uma no topo da outra, como na figura ao lado, observamos que a soma das três medidas corresponde a 3 vezes a distância *h* (o bloco verde debaixo compensa com o bloco verde do topo).
Logo, *h* = $\frac{113+80+82}{3} = 91$ cm.

OUTRA SOLUÇÃO:
Cada uma das distâncias nas três figuras pode ser expressa em termos de *h* e das alturas de dois dos blocos:
111 = *h* – bloco verde + bloco azul
80 = *h* – bloco azul + bloco rosa
82 = *h* – bloco rosa + bloco verde
Cada bloco aparece uma vez nessas igualdades com sinal positivo e outra com sinal negativo.
Portanto, ao somá-las, eles se cancelam. Temos, assim:
111 + 80 + 82 = 3*h*
Logo, 3*h* = 273 e, portanto, h = 91 cm.

QUESTÃO 18
ALTERNATIVA E
Reescrevendo a equação de forma conveniente, temos:
$$a^2 + 2bc = c^2 + 2ab \Leftrightarrow a^2 - c^2 = 2ab - 2bc \Leftrightarrow (a+c)(a-c) = 2b(a-c)$$
Se $a = c$ então a equação é sempre verdadeira, independente do valor de b, já que ela se reduz a $0 = 0$. Nesse caso, como a, b e c estão restritos ao conjunto {0,1,2,...,9}, temos 10 possibilidades para $a = c$ e 10 possibilidades para b, totalizando $10 \times 10 = 100$ soluções diferentes.
Se $a \neq c$ então podemos cancelar o fator $(a - c)$ em ambos os lados da equação, e ela será verdadeira quando $a + c = 2b$. Nesse caso, devemos contar os casos em que $a + c$ é um número par maior do que 0 e menor do que 18 (os casos $a + c = 0$ e $a + c = 18$ já foram contados anteriormente, pois eles ocorrem quando $a = c = 0$ e $a = c = 9$). Devido à simetria $a + c = c + a$, essa contagem pode ser feita considerando apenas os casos em que $a + c$ é par com $a > c$ e, depois, multiplicando o resultado por 2. Listando esses casos a partir do valor de a, temos:

- $a = 0$: nenhum caso
- $a = 1$: nenhum caso
- $a = 2$: somente 1 caso → $c = 0$
- $a = 3$: somente 1 caso → $c = 1$
- $a = 4$: somente 2 casos → $c = 0$ e $c = 2$
- $a = 5$: somente 2 casos → $c = 1$ e $c = 3$
- $a = 6$: somente 3 casos → $c = 0$, $c = 2$ e $c = 4$
- $a = 7$: somente 3 casos → $c = 1$, $c = 3$ e $c = 5$
- $a = 8$: somente 4 casos → $c = 0$, $c = 2$, $c = 4$ e $c = 6$
- $a = 9$: somente 4 casos → $c = 1$, $c = 3$, $c = 5$ e $c = 7$

Logo, somando todos os casos acima, temos $1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 = 20$ soluções, e multiplicando por 2 devido à simetria temos um total de 40 soluções. Totalizando, temos $100 + 40 = 140$ soluções diferentes de $a^2 + 2bc = c^2 + 2ab$ em que a, b e c pertencem ao conjunto {0,1,2,...,9}. Logo, a tabela de Joãozinho tem 140 linhas.

QUESTÃO 19
ALTERNATIVA B

Após X horas, um dos relógios indicará um horário de um momento futuro que poderá ser obtido do outro relógio avançando-se $16 \cdot X$ minutos. Para que eles marquem a mesma hora, esse avanço deve ser um múltiplo da quantidade de minutos de um dia, que é $24 \cdot 60$. O menor valor de X é $\frac{24 \cdot 60}{16} = 90$. Como $90 = 3 \cdot 24 + 18$, após 3 dias e 18 horas eles marcarão a mesma hora em seus visores, que será 11:00.

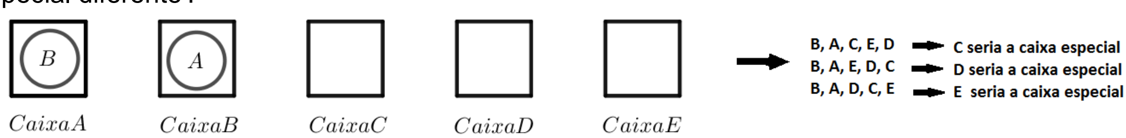
QUESTÃO 20
ALTERNATIVA C

Inicialmente vamos mostrar que abrir duas caixas não é suficiente. Vamos chamar as caixas de A,B,C,D e E e as bolas com os mesmos nomes para que possamos abrir hipóteses sem perder generalidade e chamaremos de caixa *especial* a caixa com bola de mesma numeração da caixa.

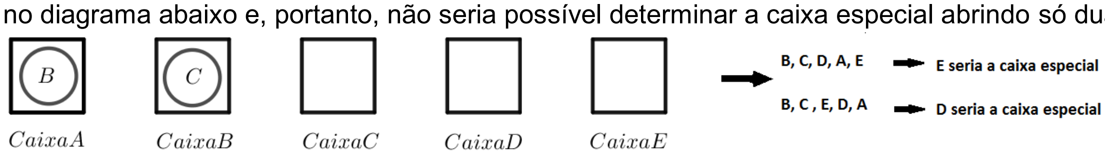
Após abrir a primeira caixa (A) duas coisas podem acontecer: encontrarmos a bola A e teremos descoberto a caixa especial. Então vamos nos concentrar no caso em que a bola na caixa A seja uma bola diferente de A, que chamaremos de B.

Hipótese 1: Abrir a caixa B (é uma hipótese ruim, pois já temos certeza de que a caixa B não é a especial, mas, ainda assim, vamos analisar para esgotar as possibilidades).

Se na caixa B estiver a bola A, então ainda não se pode saber qual é a caixa especial, basta ver no diagrama abaixo que haveria três possibilidades para as outras 3 caixas e cada uma dessas possibilidades apresenta uma caixa especial diferente :

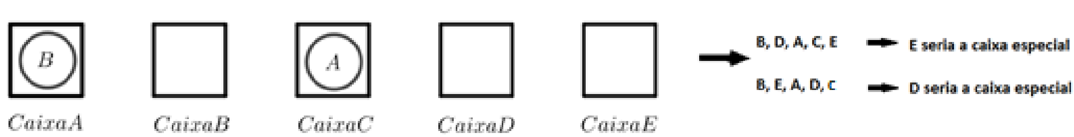


Se na caixa B estiver uma bola diferente de A e de B, podemos, sem perda de generalidade, chamá-la de C, então com certeza a caixa especial terá que ser a D ou a E, mas as duas coisas ainda poderiam acontecer como descrito no diagrama abaixo e, portanto, não seria possível determinar a caixa especial abrindo só duas caixas.

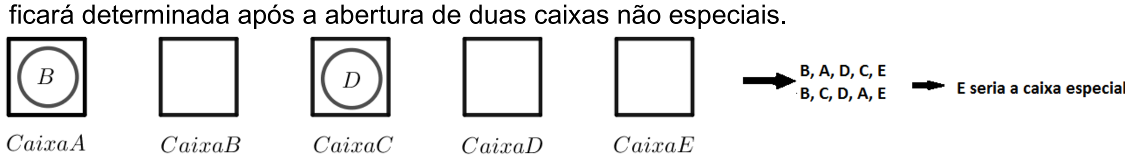


Hipótese 2: Após abrir a caixa A, escolhemos uma caixa diferente da B para abrir. Separaremos essa hipótese em dois casos: se a bola nessa caixa for A ou se a bola nessa caixa for diferente de A e de C.

Se a bola na caixa C for A, então cairemos nos dois casos do diagrama abaixo, e não será possível determinar se a caixa especial é a D ou a E:



Se a bola na caixa C for diferente de A e de C (por exemplo, D), esta será a única situação em que a caixa especial ficará determinada após a abertura de duas caixas não especiais.

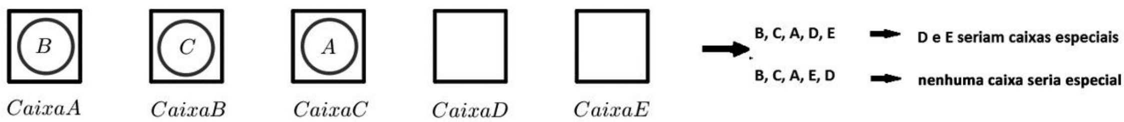


Com isso, concluímos que, de fato, a abertura de duas caixas não garante a determinação de qual é a especial.

Vamos mostrar agora que com a abertura de 3 caixas podemos garantir qual é a caixa especial.

Imaginemos que 3 caixas foram abertas e que nenhuma delas era a especial.

Se chamarmos essas 3 caixas de A,B e C, então é impossível que as 3 bolas A, B e C já tenham aparecido nas 3 primeiras caixas, pois isso obrigaria as caixas D e E a serem ambas especiais ou ambas não especiais.



Portanto, em uma das 3 caixas não especiais que já foram abertas tem que aparecer a bola de uma das outras duas caixas que automaticamente poderemos garantir que também não será especial. Com isso, só sobrará uma caixa para ser a especial.
Podemos, portanto, garantir que a quantidade mínima de caixas que precisam ser abertas para descobrirmos qual caixa contém a bola de igual número é 3.