15ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS
OBMEP 2019
Somando novos talentos para o Brasil

Nível 3
Ensino Médio
1.ª Fase – 21 de maio de 2019

Solução da prova da 1.ª Fase

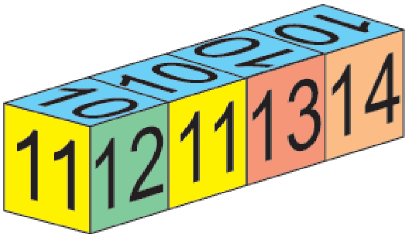
QUESTÃO 1
ALTERNATIVA B
Em um grupo de 13 estudantes temos 8 meninas e 5 meninos, ou seja, 3 meninas a mais. Em 20 grupos de 13 estudantes teremos exatamente 60 meninas a mais do que meninos. Logo, no total temos $20 \times 13 = 260$ estudantes.

QUESTÃO 2
ALTERNATIVA C
Vamos pensar nas netas como as letras A, B, C, D e E e descrever a ordem em que elas chegaram como uma sequência dessas letras, lida da esquerda para a direita. O enunciado nos diz que nessa sequência

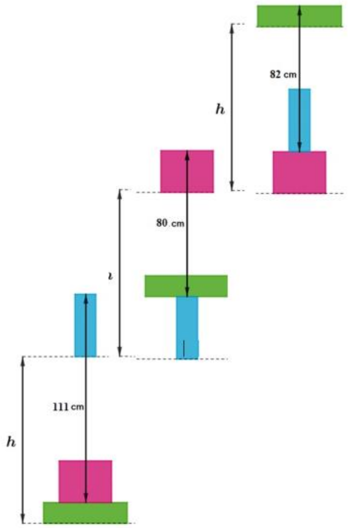
1. o B está à esquerda do A (Beatriz chegou antes de Ana);
2. o B está à direita do D (Beatriz chegou depois de Daniela);
3. o bloco CDE aparece sem letras intermediárias e com as letras nessa ordem (Cláudia, Daniela e Érica chegaram uma em seguida da outra, nessa ordem).

As informações 2 e 3 mostram que o B aparece à direita do bloco CDE, e a informação 1 diz que o A está à direita do B. A nossa sequência é, então, CDEBA, e concluímos que a primeira a chegar foi Cláudia.

QUESTÃO 3
ALTERNATIVA D
A ilustração nos permite concluir que os números escritos nas quatro faces que compartilham um lado com a face de número 10 são: 11, 12, 13 e 14. Observando as rotações do número 10, podemos concluir que 11 é oposto a 14 e 12 oposto ao 13. Mais precisamente, 13 é o número que está mais próximo do algarismo 1 do número 10, e 12 o que está mais próximo do algarismo 0. Assim, a soma dos números das faces em contato é 14 + 13 + 12 + 14 + 11 + 12 = 76.



QUESTÃO 4
ALTERNATIVA D
Representando graficamente as três situações uma no topo da outra, como na figura ao lado, observamos que a soma das três medidas corresponde a 3 vezes a distância *h* (o bloco verde debaixo compensa com o bloco verde do topo).
Logo, *h* = $\frac{113+80+82}{3} = 91$ cm.



OUTRA SOLUÇÃO:
Cada uma das distâncias nas três figuras pode ser expressa em termos de *h* e das alturas de dois dos blocos:
111 = *h* – bloco verde + bloco azul
80 = *h* – bloco azul + bloco rosa
82 = *h* – bloco rosa + bloco verde
Cada bloco aparece uma vez nessas igualdades com sinal positivo e outra com sinal negativo.
Portanto, ao somá-las, eles se cancelam. Temos, assim:
111 + 80 + 82 = 3*h*
Logo, 3*h* = 273 e, portanto, h = 91 cm.

QUESTÃO 5
ALTERNATIVA A
Para obter $f(3)$, façamos $\frac{2x+1}{x-1} = 3$. Obtemos, assim, $2x + 1 = 3\,(x - 1)$, ou seja, $x = 4$. Portanto,
$$f(3) = \frac{1}{4}$$

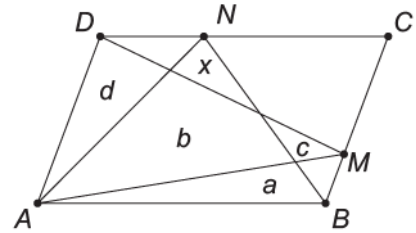
QUESTÃO 6
ALTERNATIVA E
Vamos usar as letras *p*, *c* e s para denotar o preço (em reais) de um pão de queijo, de um cachorro-quente e de um suco de laranja, respectivamente. O enunciado nos diz que $p + 2c + s = 31$ e $3p + 3c + 2s = 59$. Multiplicando a primeira expressão por 2 e subtraindo do resultado, pois, assim, a segunda expressão, obtemos
$$2(p + 2c + s) - (3p + 3c + 2s) = c - p$$
e, por outro lado,
$$2(p + 2c + s) - (3p + 3c + 2s) = 2 \cdot 31 - 59 = 3$$
ou seja, $c - p = 3$.
Vamos a outra solução; ao contrário da anterior, onde o $c - p$ apareceu "por acaso", nessa vamos sistematicamente em busca de $c - p$, escrevendo
$$31 = p + 2c + s = 2(c - p) + 3p + s$$
e
$$59 = 3p + 3c + 2s = 3(c - p) + 6p + 2s.$$
Observando essas expressões, notamos que o $6p + 2s$ da segunda é duas vezes o $3p + s$ da primeira, o que sugere multiplicar a primeira expressão por 2 e subtrair a segunda do resultado, pois assim os termos em p e s desaparecem, restando apenas um termo em $c - p$. Temos então
$$2 \cdot 31 - 59 = [4(c - p) + 6p + 2s] - [3(c - p) + 6p + 2s] = c - p$$
ou seja, temos $c - p = 3$ como antes.

QUESTÃO 7
ALTERNATIVA E
Observando que AAA = A × 111 = A × 3 × 37 , temos as seguintes possibilidades:
A = 1. Não serve pois teríamos, obrigatoriamente, AB = 37 e o primeiro dos A´s na conta seria 3 e não 1.
A = 2. Não serve pois teríamos AB = 37 com B = 6 ou AB = 74 com B = 3. Nos dois casos, olhando para o primeiro dos A's na conta, teríamos A ≠ 2.
A = 3. Serve pois AB seria 37 e, consequentemente, A = 3 , B =7 e C = 9.
A = 4. Não serve, AB seria 74 e C = 6, ou seja, o primeiro A da conta seria 7 ≠ 4.
A = 5. Não serve, pois teríamos C com 2 algarismos ou AB com 3 algarismos.
A = 6. Não serve, AB seria 74 e C = 9, ou seja, o primeiro A da conta seria 7 ≠ 6.
A > 6. Não serve, pois teríamos C com 2 algarismos ou AB com 3 algarismos.
Logo, C = 9.

QUESTÃO 8
ALTERNATIVA B
Há 15 possibilidades de escolhas de uma bola da primeira caixa juntamente com uma bola da segunda caixa. Dessas 15 escolhas duplas (uma bola de cada caixa), somente 3 repetem a mesma letra. Logo, a probabilidade das duas bolas terem a mesma letra é 3/15= 1/5.

OUTRA SOLUÇÃO:
Basta olhar para as bolas na ordem inversa do sorteio, ou seja, olhe para a segunda bola primeiro. Os 3 resultados são bons para a sua intenção. Agora olhe para a primeira bola sorteada: apenas um dos 5 resultados são favoráveis a sua intenção, portanto, a probabilidade desejada é 1/5.

QUESTÃO 9
ALTERNATIVA A



O triângulo *ABN* tem base *AB* igual à do paralelogramo e altura relativa a essa base igual à altura do paralelogramo relativa a essa mesma base. Portanto, a área de *ABN* (que é igual a $a + b + x$) é igual à metade da área do paralelogramo. Do mesmo modo, a área de *ADM* (igual a $d + b + c$) é também igual à metade da área do paralelogramo.
Logo, $a + b + x = d + b + c$ e, daí, $x = c + d - a$.

QUESTÃO 10
ALTERNATIVA B
Observando que

$1111111111 = \dfrac{10^{10}-1}{9}$ e

$22222 = 2\times 11111 = 2\times\dfrac{10^{5}-1}{9}$, temos:

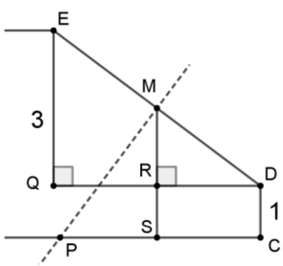
$$\sqrt{\frac{10^{10}-1}{9}-2\times\frac{10^{5}-1}{9}}=\frac{\sqrt{10^{10}-2.10^{5}+1}}{3}=\frac{\sqrt{\left(10^{5}-1\right)^{2}}}{3}=\frac{10^{5}-1}{3}=3\times\frac{10^{5}-1}{9}=3\times 11111=33333$$

Logo, a soma dos algarismos do número apresentado no enunciado é 3 × 5 =15.

QUESTÃO 11
ALTERNATIVA E

Os triângulos isósceles *DEP* podem ser divididos em três tipos: $PE = PD, DP = ED$ e $ED = EP$. Vamos analisar esses casos um a um; vamos também garantir que, em cada caso, não aparecem triângulos equiláteros, de modo que a contagem final será dada pela soma das contagens em cada caso.

Caso $PE = PD$: Nesse caso *P* deve estar na mediatriz de *DE*, conforme a figura à direita. É visualmente claro que aqui temos apenas um triângulo isósceles, mas do ponto de vista matemático isso não é suficiente; devemos mostrar que a mediatriz de *DE* intersecta a reta *BC* entre os pontos *B* e *C*, ou, equivalentemente, que $CP < 8$.



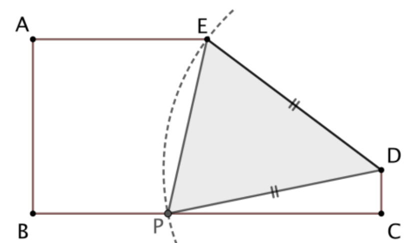
Para isso, consideremos a figura à esquerda, em que *M* é o ponto médio de *DE* e a reta *MP* é a mediatriz de *DE*. O segmento *MR* é base média do triângulo *DQE*; segue que $MR = 1{,}5$ e então $MS = 2{,}5$ (curiosamente, o triângulo *MSD* é isósceles). Observamos agora que os triângulos *SPM* e *DQE* são semelhantes, de vez que são ambos retângulos e seus ângulos em *M* e *D*, sendo agudos e tendo seus lados dois a dois perpendiculares, são iguais. Segue que $\frac{PS}{MS} = \frac{EQ}{DQ}$, ou seja, $\frac{PS}{2{,}5} = \frac{3}{4}$. Logo, $PS = 1{,}85$ e, então, $CP = CS + SP = 3{,}85 < 8$, ou seja, *P* está de fato no segmento *BC*.

Observamos finalmente que o triângulo *PDE* não é equilátero, pois do triângulo retângulo *DPC* obtemos

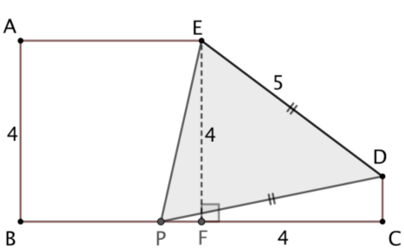
$$DP^2 = 1^2 + CP^2 < 1 + (3{,}85)^2 < 1 + 16 = 17$$

e, então, $DP < 5$.

Caso $DE = DP$: Nesse caso *P* deve estar em uma circunferência de centro *D* e raio *DE*. É visualmente claro que temos apenas um triângulo isósceles, conforme a figura à direita. Para mostrar que esse é o caso, observamos que se supormos $DP = 5$ com $P \in BC$, o teorema de Pitátoras aplicado ao triângulo retângulo *CPD* nos dá



$$CP^2 = 5^2 - 1^2 = 24, \text{ ou seja, } CP = 2\sqrt{6} < 8.$$

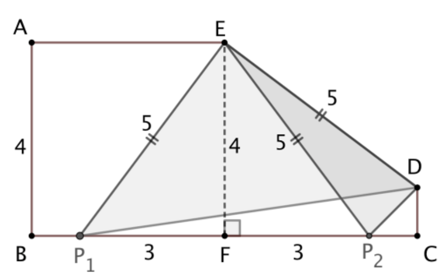


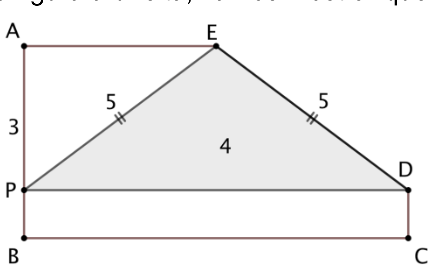
Para mostrar que o triângulo *DEP* não é equilátero vamos usar a figura à esquerda, onde *F* é o pé da perpendicular traçada por *E* a *BC*. Como $CF = EF = 4$ e $CP = 2\sqrt{6} > 4$, temos $PF = 2\sqrt{6} - 4$; o triângulo retângulo *EFP* nos dá

$$EP^2 = 4^2 + \left(2\sqrt{6} - 4\right)^2 = 56 - 16\sqrt{6} < 56 - 16 \times 2{,}4 = 17{,}6 < 25$$

Foi usado que $\sqrt{6} > 2{,}4$ na penúltima desigualdade. Logo, $EP < 5$ e o triângulo *DEP* não é equilátero.

Caso $EP = ED$: Nesse caso *P* deve estar na circunferência de centro *E* e raio *ED*. Outra vez, é visualmente claro que temos três soluções, conforme a figura à direita; vamos mostrar que isso realmente acontece.



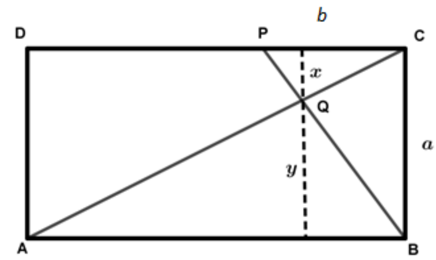


Subcaso $P \in AB$: Se $P \in AB$ é tal que $EP = ED = 5$, conforme a figura à esquerda, o teorema de Pitágoras nos diz que $AP = 3$, ou seja, temos um único *P* neste caso. Notamos que o triângulo *EDP* não é equilátero pois $DP = 8$.

Subcaso $P \in BC$: Sejam *F* o pé da perpendicular traçada de *E* a *BC* e P_1, $P_2 \in BC$ tais que $FP_1 = FP_2 = 3$. Aqui também o teorema de Pitágoras nos mostra que $EP_! = EP_2 = 5$ e temos os dois triângulos isósceles EDP_1 e EDP_2. Observamos que nenhum deles é equilátero; de fato, o triângulo retângulo CDP_1 nos dá $(DP_1)^2 = 1^2 + 7^2 = 50$, donde $DP_1 \neq 5$ e o triângulo retângulo DCP_2 nos dá $(DP_2)^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, donde $DP_1 \neq 5$.

Desse modo, existem exatamente cinco triângulos isósceles satisfazendo as condições do enunciado.

QUESTÃO 12
ALTERNATIVA A

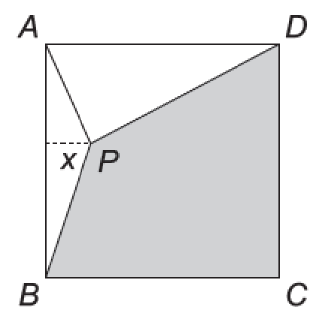


A medidas dos segmentos *BC* e *CP* são denotadas, respectivamente, por a e b, e x e y denotam as medidas das alturas dos triângulos *PQC* e *ABQ*, respectivamente. A área do triângulo *BCP* é 8, assim $\frac{a \cdot b}{2} = 8$; portanto $b = 16/a$. Além disso, temos as relações:

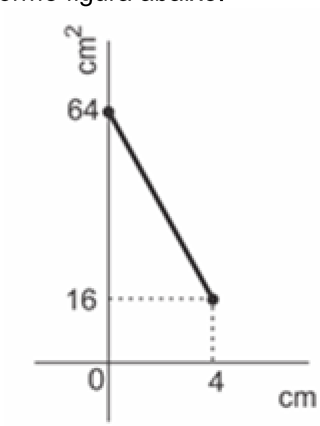
- $\frac{16}{a} \cdot \frac{x}{2} = 2 \iff x = \frac{a}{4}$
- $y = a - \frac{a}{4} = \frac{3}{4}a$

Por outro lado, os triângulos *ABQ* e *PQC* são semelhantes (por terem seus ângulos internos iguais) com razão de semelhança $\frac{y}{x} = 3$, o que implica na igualdade
$\acute{a}rea(ABQ) = 9 \times \acute{a}rea(PQC) = 18.$
Portanto, $\acute{a}rea(ABCD) = 2 \times (18 + 6) = 48.$

QUESTÃO 13
ALTERNATIVA E



A área do triângulo *ABP* em função de *x* é igual a $\frac{8 \cdot x}{2} = 4x$, pois sua base *AB* mede 8 cm, e a altura relativa a essa base é exatamente a distância do ponto *P* a essa base, ou seja, *x*. A área do triângulo *APD* é o dobro, isto é, $8x$. Portanto, a área da região destacada em cinza é igual à área do quadrado subtraída das áreas desses dois triângulos, ou seja, igual a $8^2 - (4x + 8x) = 64 - 12x$. O valor de *x* varia entre 0, quando *P* coincide com o vértice *A*, e 4, quando *P* coincide com o ponto médio do lado *BC* (lembremos que o ponto *P* deve permanecer no interior do quadrado, conforme nos diz o enunciado). Se *y* é área da região cinza, então $y = 64 - 12x$ para *x* real e $0 \le x \le 4$, e o gráfico de *y* em função de *x* é um segmento de reta, conforme figura abaixo.



QUESTÃO 14
ALTERNATIVA C

A afirmação **I** é falsa, pois, por exemplo, os cartões com os números 1, 1, 22 e 22 satisfazem o enunciado e nem todos são iguais ou maiores do que 8.

A afirmação **II** é verdadeira. Para ver isso, sejam a, b, c e d os números nos cartões. Sabemos que

$$a + b + c \geq 24$$
$$a + b + d \geq 24$$
$$a + c + d \geq 24$$
$$b + c + d \geq 24$$

Da primeira igualdade, podemos inferir que ou $a \geq 8$ ou $b \geq 8$ ou $c \geq 8$. Sem perda de generalidade, suponhamos $a \geq 8$. Analisemos agora a última das quatro equações acima; pelo mesmo motivo, um dos três números, b, c ou d, deve ser igual ou maior do que 8, digamos que $b \geq 8$, novamente sem perda de generalidade. Logo, $a + b \geq 16$.

A afirmação **III** é verdadeira. Escolhendo a e b como acima, concluímos que $a \times b \geq 64$.

QUESTÃO 15
ALTERNATIVA D

A ocupação dos lugares se dá em duas etapas:

- Inicialmente, os lugares são ocupados de modo que não haja cadeiras vizinhas ocupadas, até que isto não seja mais possível.
- A seguir, os demais lugares são ocupados em qualquer ordem.

Para contar o número de possibilidades de ocupação, vamos, inicialmente, encontrar as configurações *maximais*, para as quais não há cadeiras vizinhas ocupadas, mas tais que o próximo a chegar necessariamente precisará sentar ao lado de alguém. Há dois tipos de configurações maximais:

- Com 2 pessoas, que devem ocupar os lugares 2 e 5
- Com 3 pessoas, que podem ocupar os lugares 1, 3, 5; 1, 3, 6; 1, 4, 6; ou 2, 4, 6.

No primeiro caso, há 2 possibilidades para a ordem de ocupação dos assentos 2 e 5; para cada uma dessas possiblidades os lugares podem ser ocupados em qualquer ordem, ou seja, há $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ possiblidades.

Para cada uma das 4 situações do segundo caso, há $3 \times 2 \times 1 = 6$ possibilidades de ordem de ocupação dos lugares da configuração maximal; a seguir, para cada uma dessas possiblidades, os demais lugares também podem ser ocupados em qualquer ordem, com um total de $3 \times 2 \times 1 = 6$ possibilidades.

Logo, o número total de possibilidades de ocupação é igual a:

$2 \times 24 + 4 \times 6 \times 6 = 192$ possibilidades.

QUESTÃO 16
ALTERNATIVA C

Na ida da pedra 1 até a pedra 10, a rã tem que transpor 9 espaços entre pedras consecutivas. Em cada salto, a rã pode percorrer 1, 2 ou 3 espaços. Se chamarmos de x, y e z o número de saltos em que a rã percorre 1, 2 ou 3 espaços, respectivamente, temos

$x + y + z = 5$ (já que a rã anda 5 pulos)

$x + 2y + 3z = 9$ (já que são 9 espaços a percorrer)

Subtraindo as duas equações, encontramos $y + 2z = 4$. A tabela abaixo dá os possíveis valores de x, y e z e o número de possibilidades em cada caso.

z	y	x	Número de possibilidades
0	4	1	O salto em que é percorrido 1 espaço pode ser qualquer um dos 5 saltos. Há 5 possibilidades.
1	2	2	O salto em que são percorridos 3 espaços pode ser escolhido de 5 modos. Dos 4 saltos restantes, 2 devem percorrer dois espaços; esses saltos podem ser escolhidos de $\frac{4\,x\,3}{2} = 6$ modos. Logo, há 5 x 6 = 30 possibilidades.
2	0	3	Os dois saltos em que são percorridos 3 espaços podem ser escolhidos de $\frac{5\,x\,4}{2} = 10$ modos. Os demais saltos são de 1 espaço cada. Há 10 possibilidades.

Logo, o número total de possiblidades para os saltos da rã é 5 + 30 + 10 = 45.

QUESTÃO 17
ALTERNATIVA C

Seja p a probabilidade de partir de A e chegar a B. Além disso, seja q a probabilidade de a formiga chegar a algum dos outros pontos no topo da pista, diferentes de B.

Como ela se move ou para a direita ou para cima, ela inevitavelmente chegará a um dos pontos do topo da pista. Assim temos que p + q =1.

Além disso, qualquer caminho que parte de A até B tem que ser do seguinte tipo: partindo de A chega até um dos pontos da linha vertical mais à direita, e sobe até B.

Isso significa que p é a soma das probabilidades de chegar a um dos pontos na linha mais à direita do ponto A.

Mas cada caminho desses tem um caminho correspondente, com a mesma probabilidade, que chega a um dos pontos no topo da pista. Para entender esse mapeamento, chame de V um movimento vertical e de H um movimento horizontal. Um caminho até um dos pontos no topo é uma sequência de movimentos VVHV...

Para cada caminho desses, corresponde um caminho até a linha vertical mais à direita, obtido pela troca de V ↔ H. Por exemplo, o caminho VVVHV vai de A até o segundo ponto do topo, da esquerda para a direita. O caminho HHHVH vai de A até o segundo ponto, de baixo para cima, na linha vertical mais à direita de A. Esses dois caminhos têm a mesma probabilidade.

Portanto, a soma das probabilidades de se partir de A e chegar a algum ponto da linha vertical mais à direita de A é q, o que implica p = q.

Mas, como p + q = 1, p = 1/2.

OUTRA SOLUÇÃO

Qualquer caminho que parte de A e chega a B tem que ser do seguinte tipo: partindo de A chega até um dos pontos da linha vertical mais à direita de A, e sobe até B, pois, uma vez nessa linha, a formiga não tem outra opção que não seja subir até B.

Chamando de V um movimento vertical e de H um movimento horizontal, qualquer caminho até um desses pontos da linha mais à direita de A pode ser escrito como uma sequência de V's e H's.

Os caminhos possíveis tem, necessariamente, 4 movimentos horizontais e n movimentos verticais, com n = 0, 1, 2 ou 3. Note que, uma vez que a formiga se encontrar na linha vertical mais à direita de A, ela se movimentará verticalmente. Assim, devemos considerar os caminhos que chegam a esta linha de tal forma que o último movimento seja horizontal. A probabilidade de realizar um caminho desses é $\frac{1}{2}^{(4+n)}$.

Assim, devemos calcular quantas sequências distintas podemos escrever com 3 H's e n V's, já que o último movimento deve ser horizontal.

Se fossem 3 + n letras distintas, pelo princípio multiplicativo, teríamos (3 + n) x (3 + n – 1) x ... x 2 x 1 = (3 + n)! sequências possíveis.

Mas como temos 3 H's e n V's, devemos dividir pelas permutações de H's e V's, para evitar dupla contagem. Há 3! permutações dos H's e n! permutações dos V's que não alteram a sequência. Assim, o número de sequências distintas com 3 H's e n V's é (3 + n)!/3!n!

Então, a probabilidade de partir de A e chegar a B é

$$p = 1/2^4 \times 3!/3! + 1/2^5 \times 4!/3!1! + 1/2^6 \times 5!/3!2! + 1/2^7 \times 6!/3!3!$$
$$= 1/16 + 4/32 + 10/64 + 20/128 = (8 + 16 + 20 + 20)/128 = 64/128 = 1/2.$$

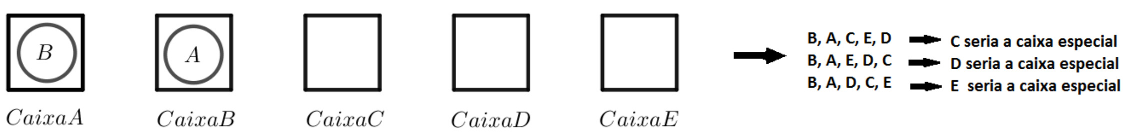
QUESTÃO 18
ALTERNATIVA C

Inicialmente vamos mostrar que abrir duas caixas não é suficiente. Vamos chamar as caixas de A,B,C,D e E e as bolas com os mesmos nomes para que possamos abrir hipóteses sem perder generalidade e chamaremos de caixa *especial* a caixa com bola de mesma numeração da caixa.

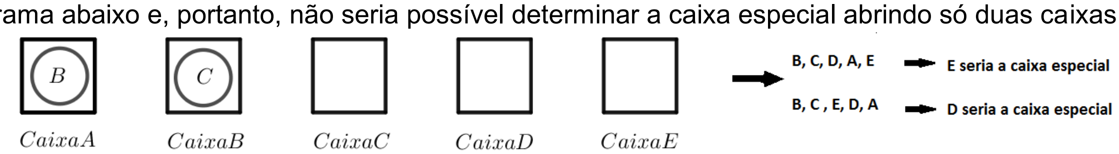
Após abrir a primeira caixa (A) duas coisas podem acontecer: encontrarmos a bola A e teremos descoberto a caixa especial. Então vamos nos concentrar no caso em que a bola na caixa A seja uma bola diferente de A, que chamaremos de B.

Hipótese 1: Abrir a caixa B (é uma hipótese ruim, pois já temos certeza de que a caixa B não é a especial, mas, ainda assim, vamos analisar para esgotar as possibilidades).

Se na caixa B estiver a bola A, então ainda não se pode saber qual é a caixa especial, basta ver no diagrama abaixo que haveria três possibilidades para as outras 3 caixas e cada uma dessas possibilidades apresenta uma caixa especial diferente :

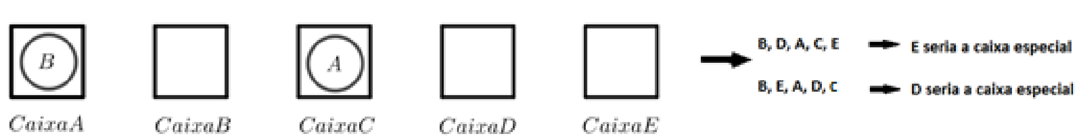


Se na caixa B estiver uma bola diferente de A e de B, podemos, sem perda de generalidade, chamá-la de C, então com certeza a caixa especial terá que ser a D ou a E, mas as duas coisas ainda poderiam acontecer como descrito no diagrama abaixo e, portanto, não seria possível determinar a caixa especial abrindo só duas caixas.

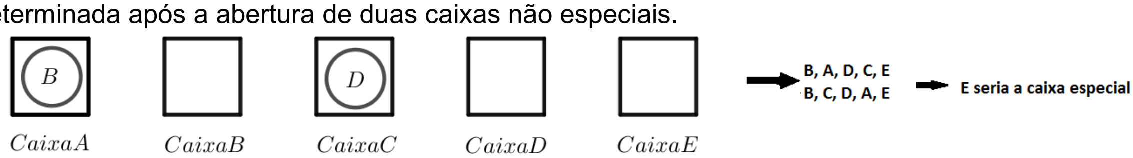


Hipótese 2: Após abrir a caixa A, escolhemos uma caixa diferente da B para abrir. Separaremos essa hipótese em dois casos: se a bola nessa caixa for A ou se a bola nessa caixa for diferente de A e de C.

Se a bola na caixa C for A, então cairemos nos dois casos do diagrama abaixo, e não será possível determinar se a caixa especial é a D ou a E:



Se a bola na caixa C for diferente de A e de C (por exemplo, D), esta será a única situação em que a caixa especial ficará determinada após a abertura de duas caixas não especiais.

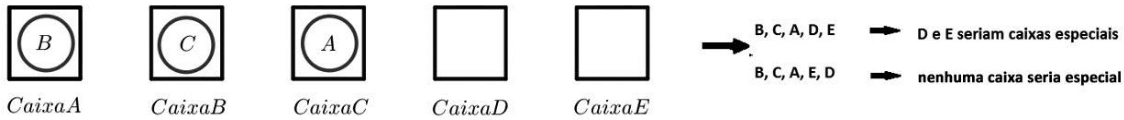


Com isso, concluímos que, de fato, a abertura de duas caixas não garante a determinação de qual é a especial.

Vamos mostrar agora que com a abertura de 3 caixas podemos garantir qual é a caixa especial.

Imaginemos que 3 caixas foram abertas e que nenhuma delas era a especial.

Se chamarmos essas 3 caixas de A,B e C, então é impossível que as 3 bolas A, B e C já tenham aparecido nas 3 primeiras caixas, pois isso obrigaria as caixas D e E a serem ambas especiais ou ambas não especiais.



Portanto, em uma das 3 caixas não especiais que já foram abertas tem que aparecer a bola de uma das outras duas caixas que automaticamente poderemos garantir que também não será especial. Com isso, só sobrará uma caixa para ser a especial.
Podemos, portanto, garantir que a quantidade mínima de caixas que precisam ser abertas para descobrirmos qual caixa contém a bola de igual número é 3.

QUESTÃO 19
ALTERNATIVA D
Usaremos as seguintes notações:
- V : Volume do reservatório;
- v_1: vazão da primeira torneira;
- v_2: vazão da segunda torneira;
- T_1: tempo que leva a primeira torneira para encher o reservatório;
- T_2: tempo que leva a segunda torneira para encher o reservatório.

Observamos que $T_1 = \frac{V}{v_1}$ e $T_2 = \frac{V}{v_2}$. De acordo com o enunciado, vale a igualdade:
$\frac{5}{6}V = \frac{1}{3} \cdot v_1 \cdot \frac{V}{v_2} + \frac{1}{3} \cdot v_2 \cdot \frac{V}{v_1}$;
portanto $\frac{5}{2} = \frac{v_1}{v_2} + \frac{v_2}{v_1}$. Suponhamos que a primeira torneira é a de maior vazão ($v_1 > v_2$) e chamemos $x = \frac{v_1}{v_2} > 1$, então
$\frac{5}{2} = x + \frac{1}{x} \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = (2x-1)(x-2) = 0$;
logo, $x = \frac{v_1}{v_2} = 2$. Levando em conta que as duas torneiras, juntas, enchem o reservatório em 2 horas e 30 minutos (150 min.), temos que

$$T_1 = \frac{V}{v_1} = \frac{150(v_1 + v_2)}{v_1} = 150\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 225.$$

Assim, o tempo necessário para a torneira de maior vazão encher o reservatório é de 225 minutos = 3 horas e 45 minutos.

QUESTÃO 20
ALTERNATIVA C
Sejam h o número de meninos e m o número de meninas no aniversário. Por um lado, como cada menino conhece 4 meninas, o número de relações de conhecimento é $4 \cdot h$. Por outro lado, como cada menina conhece $h-5$ meninos, esse número também é igual é $(h-5) \cdot m$.
De $4 \cdot h = (h-5) \cdot m$, podemos concluir que $h \cdot (m-4) = 5m$. Como o membro direito dessa equação é um múltiplo de 5, segue que h ou $m-4$ é um múltiplo de 5. Não podemos ter $h = 5$ ou $m = 4$, pois nesses casos a equação não possui solução.
Quando h é múltiplo de 5, os possíveis pares (h, m) que satisfazem a equação são: (10, 8), (15, 6), (20, 16/3), ...
Quando $m-4$ é um múltiplo de 5, os possíveis pares (h, m) que satisfazem a equação são: (9, 9), (7 , 14), (19/3, 19), ...
Note que, se $m - 4 \geq 10$ ou $h \geq 15$, temos $m + h \geq 14 + \frac{5m}{m-4} > 14 + 5 = 19$ ou $m + h \geq 4h/(h-5) + 15 > 4 + 15 = 19$. Assim, considerando as soluções (10,8) e (9,9), podemos concluir que $m + h \geq 18$.
Para exibir um exemplo em que essa soma mínima é atingida, considere uma festa contendo os meninos $h_1, h_2, \ldots, h_{10}$ e as meninas $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7, m_8$. Se apenas as pessoas dentro de um dos seguintes grupos $\{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, m_1, m_2, m_3, m_4\}$ e $\{h_6, h_7, h_8, h_9, h_{10}, m_5, m_6, m_7, m_8\}$ se conhecerem, as condições do enunciado serão satisfeitas.
Logo, o número mínimo de pessoas na festa é 18.