Nível A

4.º e 5.º anos do Ensino Fundamental

OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS
OBMEP 2019 - NÍVEL A
Somando novos talentos para o Brasil

Solução da prova

QUESTÃO 1
ALTERNATIVA D

A letra O aparece 3 vezes.
A letra B aparece 3 vezes.
A letra M aparece 3 vezes.
A letra E aparece 6 vezes.
A letra P aparece 2 vezes.
Logo, a que mais aparece é a letra E.

QUESTÃO 2
ALTERNATIVA B

Nove dias depois de sábado corresponde a uma semana (7 dias) mais dois dias. Uma semana depois de um sábado é novamente um sábado, oito dias depois de um sábado é um domingo, e 9 dias depois de um sábado é uma segunda-feira. Logo, Joana voltou em uma segunda-feira.

QUESTÃO 3
ALTERNATIVA E

A imagem do palhaço no espelho aparece refletida. Observando os dentes de Fiascone, vemos que somente as alternativas D ou E podem corresponder à sua imagem no espelho. As sobrancelhas revelam que a imagem no espelho só pode ser a da figura em E.

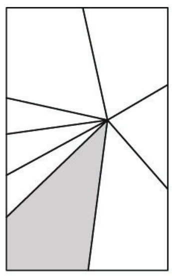
Observação: outros elementos da figura podem ser utilizados para se chegar à mesma conclusão.

QUESTÃO 4
ALTERNATIVA E

Todas as linhas são formadas por 8 diagonais de quadradinhos e, portanto, têm os mesmos comprimentos.

QUESTÃO 5
ALTERNATIVA B

O pedaço que está faltando é um quadrilátero com um ângulo reto, e o ângulo oposto a este ângulo reto é agudo. Isso descarta as alternativas A, C, D e E. Além disso, completando a figura, vemos que a figura da letra B é a que falta para reconstituir o espelho.



QUESTÃO 6
ALTERNATIVA C

Cada pacote de pão de forma serve para fazer 12 sanduíches, pois utilizamos 2 fatias de pão em cada sanduíche. Logo, com 2 pacotes e meio de pão fazemos 12 + 12 + 6 = 30 sanduíches.
Outra maneira de resolver o problema é contar o número total de fatias de pão que há em dois pacotes e meio e dividir o resultado por 2: (24 + 24 + 12) ÷ 2 = 60 ÷ 2 = 30.

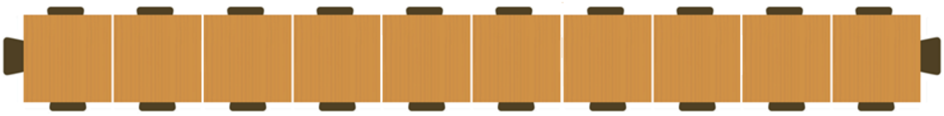
QUESTÃO 7
ALTERNATIVA C

Os anos que seguem 2019 são:
2020, cuja soma dos algarismos é 2 + 0 + 2 + 0 = 4 + 0 = 4.
2021, cuja soma dos algarismos é 2 + 0 + 2 + 1 = 4 + 1 = 5.
2022, cuja soma dos algarismos é 2 + 0 + 2 + 2 = 4 + 2 = 6.
2023, cuja soma dos algarismos é 2 + 0 + 2 + 3 = 4 + 3 = 7.
2024, cuja soma dos algarismos é 2 + 0 + 2 + 4 = 4 + 4 = 8.
2025, cuja soma dos algarismos é 2 + 0 + 2 + 5 = 4 + 5 = 9.
2026, cuja soma dos algarismos é 2 + 0 + 2 + 6 = 4 + 6 = 10.
2027, cuja soma dos algarismos é 2 + 0 + 2 + 7 = 4 + 7 = 11.
2028, cuja soma dos algarismos é 2 + 0 + 2 + 8 = 4 + 8 = 12.

Logo, em 2028, daqui a 9 anos, a soma dos algarismos do ano será novamente 12.

QUESTÃO 8
ALTERNATIVA B

Depois de enfileiradas as 10 mesas, podemos colocar 10 cadeiras em uma lateral, 10 cadeiras em outra lateral e mais duas cadeiras nas cabeceiras, totalizando 10 + 10 + 2 = 22 cadeiras. Observe:



QUESTÃO 9
ALTERNATIVA A

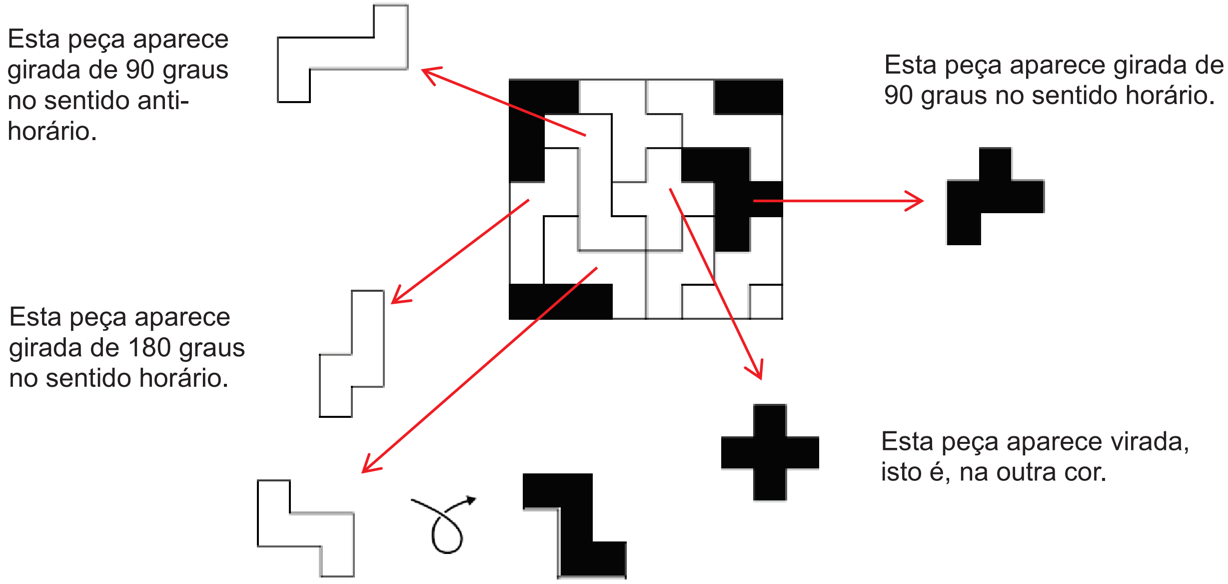
Para que a soma de dois pesos seja 9, há apenas duas possibilidades: 3 e 6 ou 4 e 5. A primeira dessas possibilidades não pode ocorrer, pois, retirando-se 3 e 6, restam os pesos 1, 2, 4 e 5, e, juntando quaisquer dois deles, não podemos somar 8, que é o peso total na segunda gaveta. Logo, na primeira gaveta devem estar os pesos 4 e 5. Assim, na segunda gaveta só podem estar os pesos 2 e 6 e, finalmente, na terceira gaveta devem estar os pesos 1 e 3.

QUESTÃO 10
ALTERNATIVA C

A figura do enunciado tem área 18, pois há 18 quadradinhos em seu interior.
A figura da alternativa A) tem área 6 x 5 = 30.
A figura da alternativa B) tem área 7 x 3 = 21.
A figura da alternativa C) tem área 9 x 2 = 18.
A figura da alternativa D) tem área 4 x 4 = 16.
A figura da alternativa E) tem área 7 x 5 = 35.

QUESTÃO 11
ALTERNATIVA C

Das cinco opções apresentadas, basta verificar qual delas não aparece no quebra-cabeça.



A peça que aparece na letra C não foi utilizada na montagem do quebra-cabeça. Observe que foi utilizada uma única peça com o formato igual ao da peça da letra C, porém com a cor invertida.

QUESTÃO 12
ALTERNATIVA E

Como Olga não mora no mesmo andar que Érica e Karina, concluímos que Érica e Karina moram no mesmo andar. Como Ana não mora no mesmo andar que Irene e Karina, concluímos que Irene e Karina moram no mesmo andar. Logo, Karina mora junto com Érica e Irene no mesmo andar, que só pode ser o segundo. Portanto, Ana e Olga moram no primeiro andar.

QUESTÃO 13
ALTERNATIVA C

A primeira linha da tabela pode ser preenchida de duas maneiras diferentes:

1	2	3

1	3	2

Por sua vez, em cada uma dessas possiblidades, há duas maneiras de se preencher a segunda linha:

1	2	3
2	3	1

1	3	2
2	1	3

1	2	3
3	1	2

1	3	2
3	2	1

Há, agora, uma única maneira de completar a terceira linha; portanto, há apenas 4 possibilidades de preenchimento. São elas:

1	2	3
2	3	1
3	1	2

1	3	2
2	1	3
3	2	1

1	2	3
3	1	2
2	3	1

1	3	2
3	2	1
2	1	3

1		

Observe que o preenchimento das duas casas marcadas em cinza na figura ao lado determina completamente o preenchimento completo do quadriculado. Como em cada casa marcada podemos escrever o número 2 ou o número 3, pelo Princípio Multiplicativo da Contagem, existem 2 x 2 = 4 possibilidades de se completar o preenchimento.

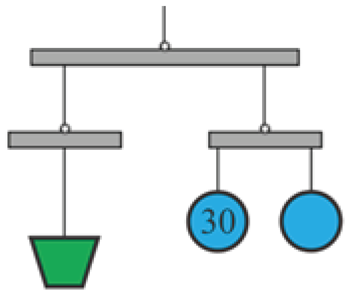
QUESTÃO 14
ALTERNATIVA D

A alternativa D é a correta, pois o número 11 pode ser obtido assim: 11 = (9 + 8 + 6) – (5 + 7).

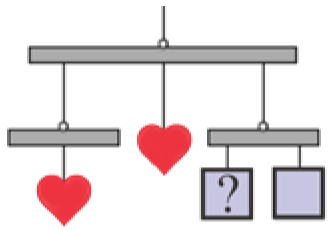
A alternativa A não pode ocorrer, pois o menor número que se obtém é (5 + 6 + 7) – (9 + 8) = 1.
A alternativa E não pode ocorrer, pois o maior número que se obtém é (9 + 8 + 7) – (5 + 6) = 13.
As alternativas B e C não podem ocorrer, pois o resultado final dos cálculos sempre será um número ímpar. Vejamos o motivo.
Devemos somar três dos números 5, 6, 7, 8 e 9 e, da soma obtida, subtrair a soma dos outros dois; como 5, 7 e 9 são números ímpares e 6 e 8 são números pares, há apenas três possibilidades:
(ímpar + ímpar + ímpar) – (par + par) ou
(ímpar + ímpar + par) – (ímpar + par) ou
(ímpar + par + par) – (ímpar + ímpar)
Em qualquer uma dessas possbilidades, o resultado final será sempre um número ímpar.

QUESTÃO 15
ALTERNATIVA B

A figura ao lado mostra uma parte do móbile que está em equilíbrio. Logo, o trapézio verde pesa 30 + 30 = 60 g, e o total dessa parte do móbile pesa 120 g.



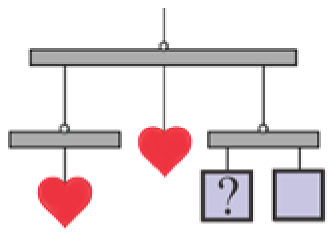
Assim, o outro lado do móbile (figura ao lado) também pesa 120 g.



Logo, os dois corações mais os dois quadrados de cor cinza pesam, juntos, 60 + 30 + 30 = 120 g, ou seja:

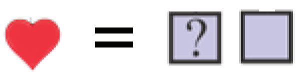
(*)

Observemos agora atentamente a situação de equilíbrio ilustrada na figura:



Ela nos diz que um coração pesa o mesmo que dois quadrados cinzas (o coração do meio não afeta o equilíbrio), ou seja,

(**)



Juntando as informações de (*) com (**), concluímos que seis quadradinhos juntos pesam 120 g e, portanto, cada quadradinho pesa 120 ÷ 6 = 20 g.

ATIVIDADE EXTRA – Mágica para adivinhar o dia do aniversário de uma pessoa

Explicação (método da bissecção):

É fácil ver como a adivinhação funciona olhando os calendários do último para o primeiro. O último calendário informa se o número pensado é menor ou maior do que 16. Fixado um número em nosso pensamento, se ele for menor do que 16, não estará circulado e, se for igual ou maior do que 16, estará circulado, reduzindo as possiblidades ao meio.

dom	seg	ter	qua	qui	sex	sab
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

Para fixar as ideias, digamos que o número pensado fosse menor do que 16 e passemos a analisar o quarto calendário (ao lado). Se o número pensado é menor do que 16 e agora está circulado, então ele deve estar entre 8 e 15, podendo ser um desses extremos, senão seria um dos números de 1 a 7.

dom	seg	ter	qua	qui	sex	sab
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

Suponha que o número esteja circulado no quarto calendário e passemos ao terceiro calendário (ao lado). Digamos que agora o número pensado não esteja circulado; então, nesse caso, ele só pode ser um dos números 8, 9, 10 ou 11. Observe que as possibilidades foram novamente reduzidas ao meio.

dom	seg	ter	qua	qui	sex	sab
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

Passamos ao segundo calendário (ao lado), e digamos que agora o número pensado esteja circulado; ele só pode ser o 10 ou o 11.

dom	seg	ter	qua	qui	sex	sab
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

Finalmente, olhemos para o primeiro calendário (ao lado). Se o número pensado estiver circulado, ele é o número 11, se não, é o número 10. Descobrimos assim o número pensado.

dom	seg	ter	qua	qui	sex	sab
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

Em outras palavras, por meio de bissecções sucessivas de um intervalo numérico, podemos sempre localizar qualquer número entre 0 e 31.

Outra explicação:
A adivinhação é baseada no fato de que todo número natural pode ser escrito como soma de potências de 2, e essa decomposição é única (decomposição na base 2). Isto é, se $n \in \mathbb{N}$, então n é uma soma única de parcelas da forma $a \times 2^j$, com $a \in \{0, 1\}$ e $j \in \mathbb{N}$.
Quando um número está circulado em um calendário, a potência de 2 correspondente a esse calendário (ou seja, o primeiro número circulado nesse calendário) entra na soma, pois o algarismo que acompanha a potência de 2 correspondente é igual a 1 e, quando um número não está circulado, a potência de 2 correspondente não entra na soma.
Observe: $17 = 1 + 16 = 1 \times 2^0 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^4$, por esse motivo 17 está circulado apenas no primeiro e no último calendário.

Em outras palavras:
Os calendários estão organizados de modo que cada um deles revela o algarismo que está presente na decomposição binária do número.

- O primeiro calendário nos diz se a potência $2^0 = 1$ faz parte ou não da decomposição do número na base 2.
- O segundo calendário nos diz se a potência $2^1 = 2$ faz parte ou não da decomposição do número na base 2.
- O terceiro calendário nos diz se a potência $2^2 = 4$ faz parte ou não da decomposição do número na base 2.
- O quarto calendário nos diz se a potência $2^3 = 8$ faz parte ou não da decomposição do número na base 2.
- O quinto calendário nos diz se a potência $2^4 = 16$ faz parte ou não da decomposição do número na base 2.

Como todo número tem uma decomposição única na base 2, isso permite, realizando somas de potências de 2, fazer a adivinhação.