Solução da prova da 2.ª Fase

QUESTÃO 1

a) De acordo com a figura, a primeira argola que foi lançada foi a amarela, pois ela está completamente em contato com a mesa, sem nenhuma embaixo dela, e as demais, em contato entre si, estão de algum modo acima dela. A seguir foi lançada a argola azul, depois a vermelha, depois a preta e, finalmente, a verde. Em suma, o que ocorreu foi o seguinte:

1º. lançamento: a argola amarela não está enlaçada – 0 ponto;
2º. lançamento: a argola azul está enlaçada – 5 pontos;
3º. lançamento: a argola vermelha não está enlaçada – 0 ponto;
4º. lançamento: a argola preta não está enlaçada – 0 ponto;
5º. lançamento: a argola verde está enlaçada – 1 ponto.

Assim, as jogadas que marcaram pontos foram a segunda e a quinta, logo, Marcelo fez 6 pontos.

b) O lançamento que Marcelo errou foi o terceiro. De fato, 10 + 5 + 1 + 1 = 17 e, de acordo com o enunciado, essa é a única maneira de se obterem 17 pontos.

c) Para obter pontuação máxima na situação descrita, Marcelo deve acertar o maior número possível de argolas nas primeiras jogadas; entretanto, como a argola vermelha está em cima da preta, a argola preta deve ter sido jogada antes dela, na primeira ou na segunda jogada. Para maximizar a pontuação, a segunda argola jogada deve ter sido a preta. Conclui-se que a pontuação máxima deve ocorrer quando a argola azul for a primeira a ser jogada (10 pontos) e a argola verde for a quarta ou a quinta a ser jogada (mais 1 ponto). A pontuação, nesse caso maximal, é, portanto, 10 + 1 = 11 pontos.

<u>Outra solução</u>: Se todas as argolas fossem enlaçadas, a pontuação máxima seria 20 pontos. Como a argola vermelha foi a terceira a ser lançada, Marcelo errou, logo, desconta-se 3 pontos. Para Marcelo ter obtido a soma máxima, a argola preta, que também errou, deve ter sido a segunda a ser lançada, então, desconta-se mais 5 pontos. Por último, a argola amarela pode ter sido a quarta ou a quinta a ser lançada. Logo, desconta-se mais um ponto. Portanto, a pontuação máxima é 20 – 3 – 5 – 1 = 11 pontos.

QUESTÃO 2

a) Para que a soma seja 18, as únicas escolhas possíveis são 1 e 17 ou 2 e 16.

b) A menor soma possível é 1 + 16 = 17, e a maior, 15 + 30 = 45. Começando com 17 e terminando em 45 (incluindo-os) há 45 – 17 + 1 = 29 termos. Portanto, há 29 resultados possíveis para a soma. São eles:

17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44 e 45.

c) O resultado mais frequente é 31. Este resultado pode ser obtido de 15 maneiras diferentes: 1 + 30, 2 + 29,..., 14+17, 15+16. Além disso:

- Para obter soma 30 ou menor, podemos usar 1 da primeira tabela, mas já não podemos mais usar o número 30 da segunda tabela e, portanto, a quantidade de resultados menores do que 30 diminui.
- Para obter soma 32 ou maior, podemos utilizar 30 da segunda tabela, mas já não podemos mais usar o número 1 da primeira tabela e, assim, a quantidade de resultados diminui, também nesse caso.

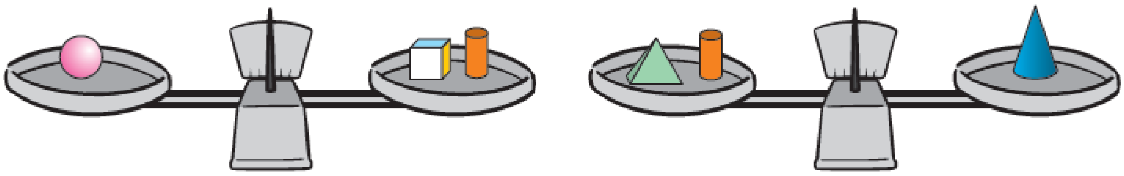
Uma outra maneira simples de ver como 31 aparece com mais frequência é listar mental e organizadamente todas as 15 x 15 = 225 somas possíveis em uma tabela:

1+16	2+16	3+16	...	**15+16**
1+17	2+17	3+17	...	15+17
...	...	...	...	...
1+28	2+28	**3+28**	...	15+28
1+29	**2+29**	3+29	...	15+29
1+30	2+30	3+30	...	15+30

e verificar que a soma 31 (em vermelho na diagonal secundária) é a única que aparece em todas as 15 colunas.

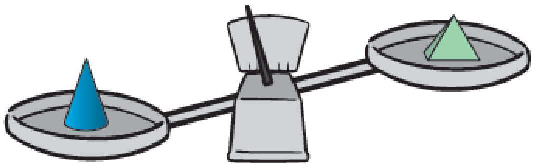
QUESTÃO 3

Observe as duas balanças que aparecem inicialmente no enunciado.



Na segunda delas, retirando-se o cilindro, notamos que o cone é mais pesado do que a pirâmide:

Logo, a ilustração que aparece na primeira balança no item a) está certa.



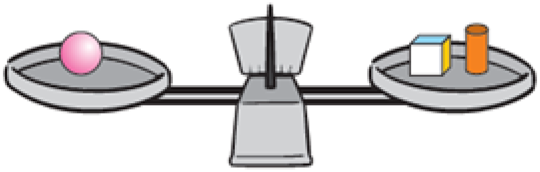
(X) Certa
(   ) Errada

Analogamente, retirando-se o cilindro da primeira balança que aparece inicialmente no enunciado, vemos que a esfera pesa mais do que o cubo:

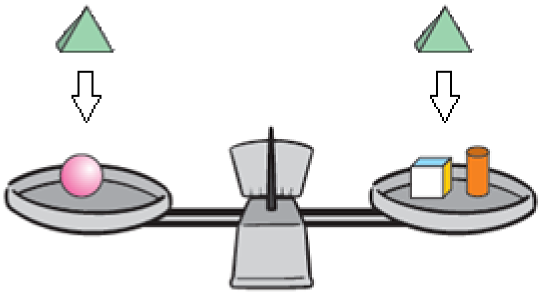
Logo, a segunda ilustração que aparece no item a) também está correta.

(X) Certa
(   ) Errada

A figura correta é a que está em equilíbrio (Figura C). Isto pode ser confirmado por meio das pesagens descritas a seguir. Partimos de



e acrescentamos uma pirâmide em cada um dos pratos:



Sabemos que uma pirâmide e um cilindro, juntos, pesam o mesmo que um cone (veja a segunda balança do enunciado). Logo, na balança acima, depois de acrescentadas as pirâmides em ambos os pratos, podemos trocar, no segundo prato, a pirâmide e o cilindro por um cone, obtendo a balança da Figura C.

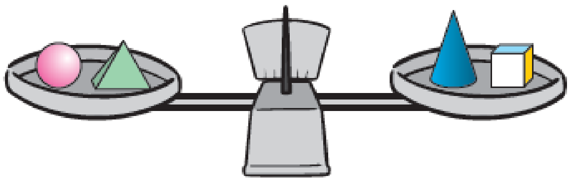
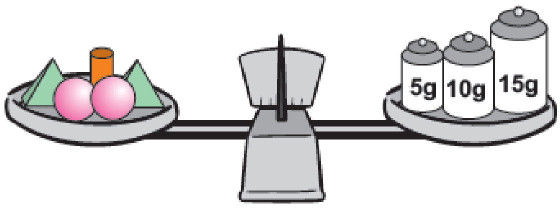
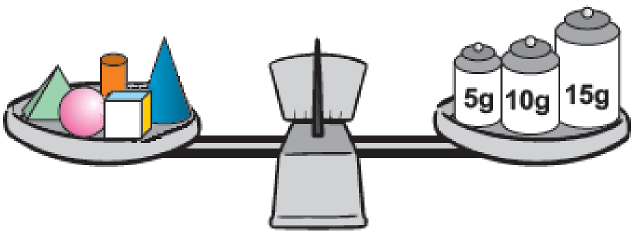


Figura C

Partimos inicialmente da seguinte situação de equilíbrio:



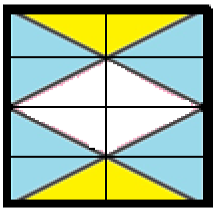
ou seja, duas pirâmides, duas esferas e um cilindro, juntos, pesam 5 + 10 + 15 = 30 gramas. Utilizando o resultado obtido em b), podemos trocar uma esfera e uma pirâmide por um cone e um cubo, obtendo:



Assim, os cinco sólidos diferentes, juntos, pesam 30 gramas.

QUESTÃO 4

a) O quadrado central tem área igual a 1 cm² e ele pode ser decomposto em 16 triângulos pequenos, todos congruentes entre si, como mostra a figura:



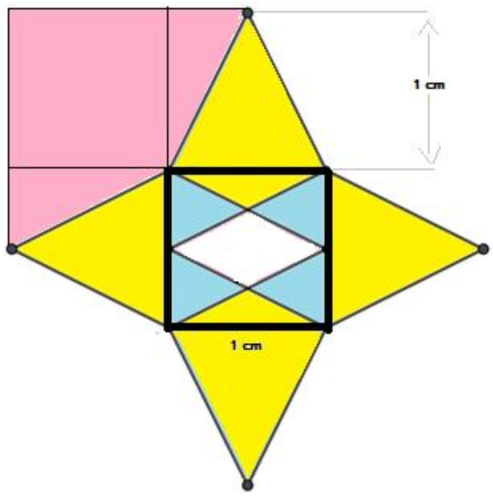
Oito desses pequenos triângulos são azuis. Logo, a área da região azul é igual a $8 \times \frac{1}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$ = 0,5 cm².

b) Observemos, na figura do item a), que quatro dos triângulos pequenos são amarelos, logo, a região amarela interna ao quadrado tem área igual a $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$. A região amarela total é formada por 4 triângulos grandes amarelos (cada um deles com área igual à metade de um quadrado de lado 1), juntamente com esses quatro triângulos amarelos contidos dentro do quadrado, logo, sua área da região amarela é igual a

$$4 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 2{,}25\ cm^2$$

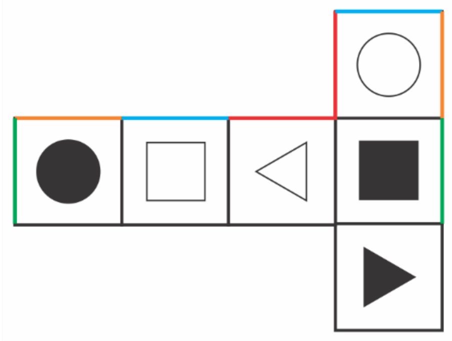
c) A região rosa pode ser decomposta em dois triângulos retângulos congruentes, cada um deles de área 1/4 cm², e um quadrado de lado 1 cm, como mostra a figura ao lado. Assim, a área da região rosa é igual a $1 + 2\ \times \frac{1}{4}\ = \frac{3}{2}$ = 1, 5 cm².

Há muitas outras decomposições da região rosa que permitem o cálculo de sua área de uma maneira simples.

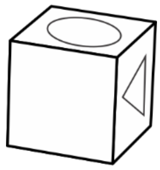


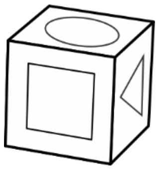
QUESTÃO 5

Dobrando a figura planificada para montar o cubo, vemos que o círculo preto terá uma aresta em comum com o quadrado preto e com o triângulo preto. Isso mostra que a face com o círculo branco é oposta à face com o triângulo preto, a face com triângulo branco é oposta à face com círculo preto e a face com quadrado branco é oposta à face com o quadrado preto.

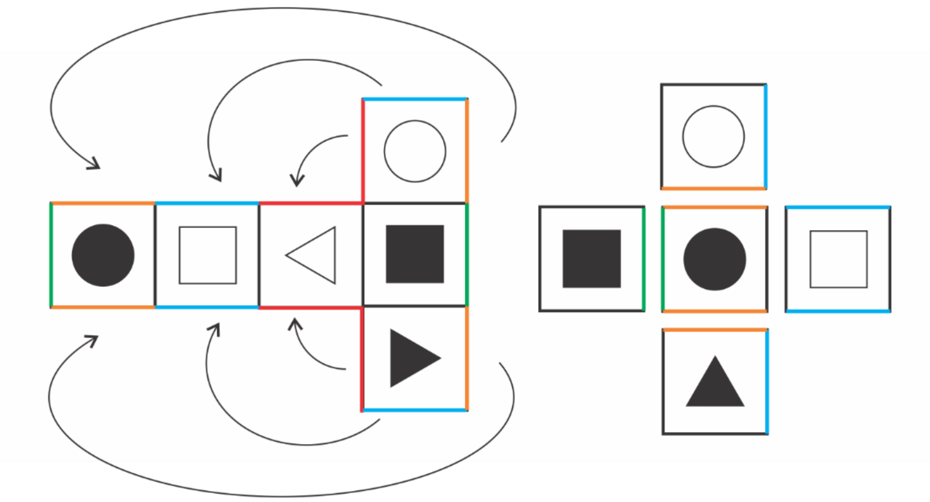


a) Se o cubo for posicionado com o círculo branco na face de cima, então as faces laterais serão exatamente as quatro faces que aparecem na fila horizontal central da planificação. Logo, o triângulo branco está numa face lateral e é vizinho das faces laterais com desenhos de quadrados, um branco e um preto. O triângulo "aponta" para o quadrado branco, que então é a figura que aparece no quadrado da frente, na vista espacial do cubo. Logo, a solução é:

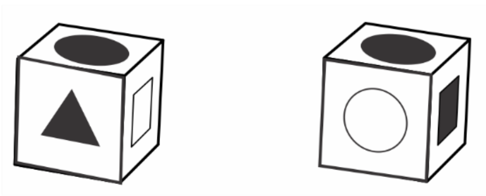


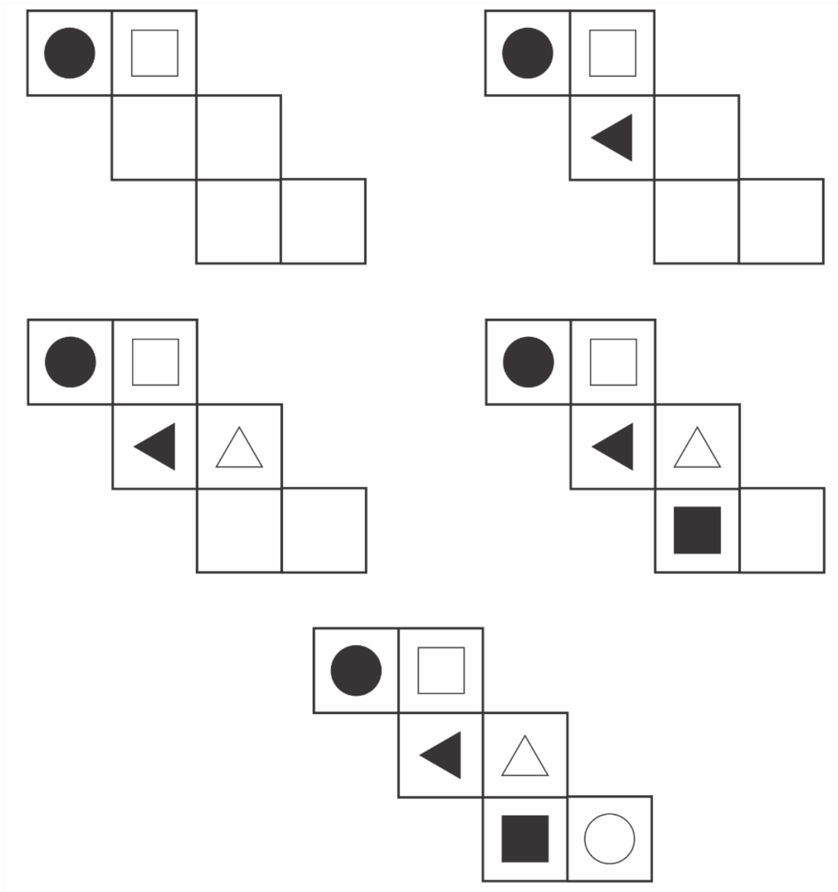


b) As faces com o círculo preto e o triângulo branco são opostas. Se a face com o círculo preto for a superior, nas faces laterais devem aparecer, além dos quadrados, o círculo branco e o triângulo preto. Como são opostas as faces com os quadrados, esses quadrados não podem aparecer numa mesma vista do cubo. Assim, nas vistas espaciais do cubo, abaixo, na face da frente só podem ser vistos o círculo branco e o triângulo preto.
Vamos nos certificar agora da orientação do triângulo preto. Na figura acima, à direita, vemos como se posicionam as faces laterais em que o círculo preto aparece no topo. Fica claro que, se a face lateral com o quadrado branco é visível à direita, na frente aparece o triângulo preto "apontando" para o círculo preto. As vistas são, então,



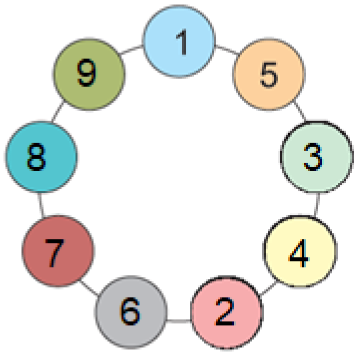
c) Na nova planificação, a face com o círculo preto fica à esquerda da face com o quadrado branco (veja a ilustração a seguir). A face abaixo da face com o quadrado branco então é a face com o triângulo preto, conforme visto no item anterior (observe que o triângulo preto deve apontar para o círculo preto no cubo montado). Então a face à direita da face com o triângulo preto é a face oposta à face do círculo preto, logo é a face com o triângulo branco. O triângulo branco deve apontar para o quadrado branco no cubo montado. A face abaixo do triângulo branco é oposta à face com o quadrado branco, logo só pode ser a face com o quadrado preto. A face que falta é a do círculo branco.





QUESTÃO 6

a) Há muitos exemplos, observe um deles:



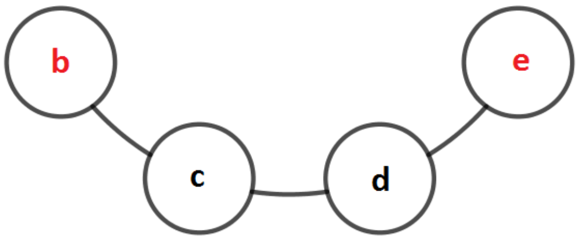
b) Para que a soma de três números seja múltipla de 3, uma dentre duas coisas deve acontecer:

1. Os três deixam o mesmo resto da divisão por 3, ou seja, os 3 são de uma mesma coluna da tabela.

ou

2. Cada um dos três deixa resto diferente na divisão por 3, ou seja, os 3 números são de três colunas diferentes.

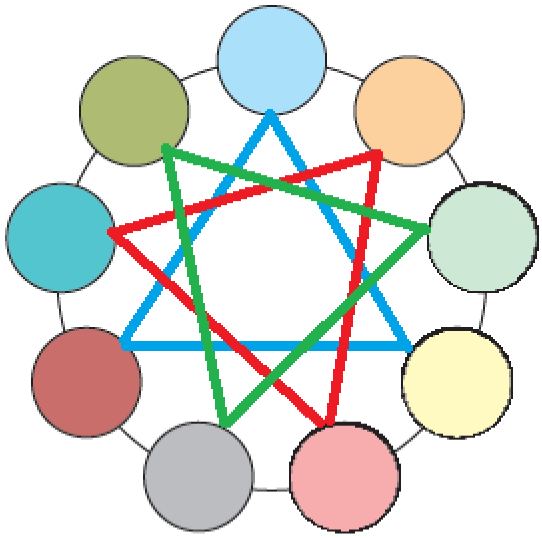
Vamos ver que a alternativa 1 não pode ocorrer. Para isso, suponhamos que dois vizinhos, os quais indicaremos pelas letras **c** e **d**, estão em uma mesma coluna da tabela, ou seja, deixam o mesmo resto da divisão por 3. Indiquemos por **b** e **e** os vizinhos de **c** e de **d**, respectivamente, como na figura:



Então, como (**b** + **c** + **d**) é múltiplo de 3, obrigatoriamente **b** terá que ser da mesma coluna da tabela onde ficam **c** e **d**. Da mesma forma, como (**c** + **d** + **e**) é múltiplo de 3, obrigatoriamente **e** também estaria na mesma coluna da tabela, o que é impossível pois, pelo enunciado, nenhum número pode repetir no preenchimento e em cada coluna da tabela só há espaço para três números.

Já que não podemos ter 2 vizinhos de uma mesma coluna, então só sobra a alternativa 2, ou seja, 3 bolas consecutivas precisam ser preenchidas com 3 números posicionados em 3 colunas diferentes da tabela 3 x 3 do enunciado.

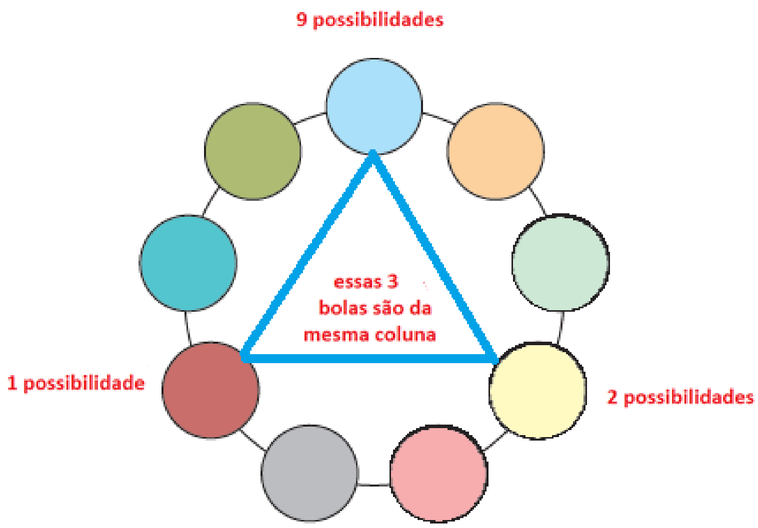
Observemos atentamente a figura abaixo, onde destacamos três triângulos coloridos:



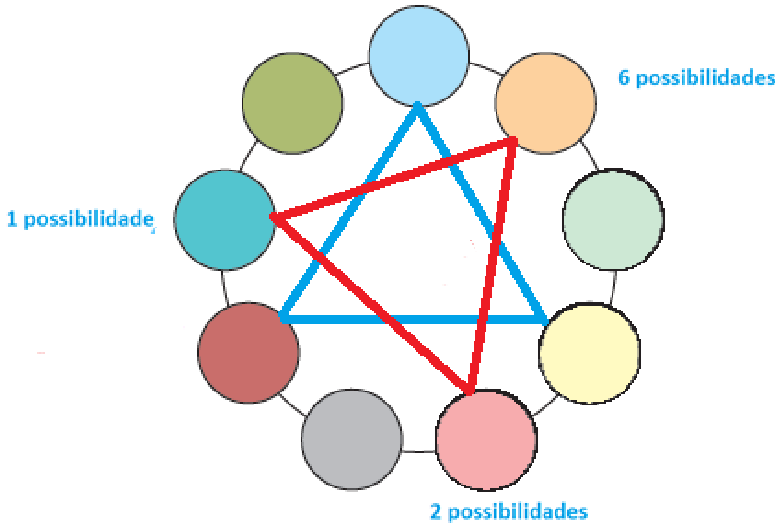
Os vértices do triângulo azul são sempre preenchidos com os números de uma mesma coluna da tabela apresentada no enunciado; os vértices do triângulo vermelho, com os números de outra coluna e, finalmente, os vértices do triângulo verde, com os números da coluna restante.

c) Agora vamos calcular de quantas formas podemos preencher as bolas coloridas:

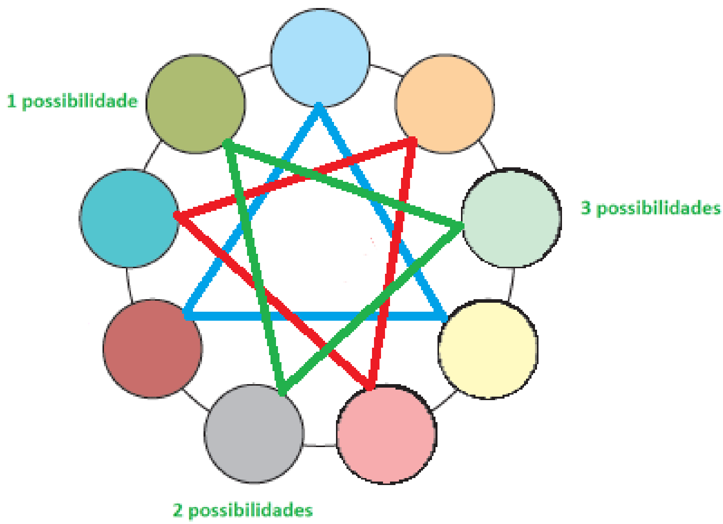
Começaremos escolhendo o número que preencherá a bola azul clara (9 possibilidades), em seguida, o número da bola amarela (2 possibilidades), pois é da mesma coluna da azul clara e, por fim, a bola marrom (1 possibilidade), pois também é da mesma coluna, conforme o diagrama abaixo:



Agora, vamos preencher o trio de bolas da figura abaixo, que estão nos vértices do triângulo vermelho (os números dessas bolas devem estar na mesma coluna da tabela): 6 possibilidades para bola laranja, 2 possibilidades para bola rosa e 1 possibilidade para bola azul escura, conforme o diagrama abaixo:



Enfim, vamos preencher os 3 círculos que faltam, lembrando que as bolas nos vértices do triângulo verde devem pertencer à mesma coluna restante da tabela, conforme o diagrama ao lado:
Portanto, o total de possibilidades é 9 x 2 x 1 x 6 x 2 x 1 x 3 x 2 x 1 = 1296.



Outra solução:

Começaremos escolhendo o número que preencherá a bola azul clara (9 possibilidades), em seguida, o número da bola laranja (6 possibilidades), pois deve ser de uma das outras duas colunas, que não aquela da azul clara e, por fim, a bola verde clara (3 possibilidades), pois deve ser da coluna restante, diferente da coluna da azul clara e da laranja.

Agora, vamos preencher a bola amarela (2 possibilidades), pois este número deverá ser de uma coluna diferente da laranja e da verde clara, logo, deve ser da mesma coluna da azul clara. O número que preencherá a bola rosa deve ser da mesma coluna da laranja (2 possibilidades), e o número que preencherá a bola cinza da mesma coluna da verde clara (2 possibilidades).

Enfim, vamos preencher os 3 círculos que faltam, seguindo o mesmo raciocínio a bola marrom deve ser da coluna das bolas amarela e azul clara (1 possibilidade), a bola azul escura deve ser da coluna das bolas rosa e laranja (1 possibilidade) e a bola verde escura deve ser da mesma coluna da bolas cinza e verde clara (1 possibilidade).

Portanto, o total de possibilidades é 9 x 6 x 3 x 2 x 2 x 2 x 1 x 1 x 1 = 1296.