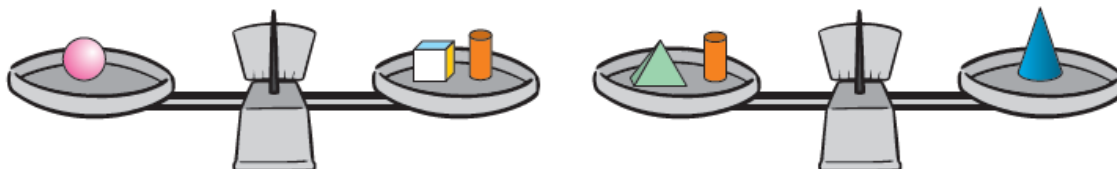


Solução da prova da 2.ª Fase

QUESTÃO 1

- a) Observe as duas balanças que aparecem inicialmente no enunciado.



Na segunda delas, retirando-se o cilindro, notamos que o cone é mais pesado do que a pirâmide:



Logo, a ilustração que aparece na primeira balança no item a) está certa.



☒ Certa
☐ Errada

Analogamente, retirando-se o cilindro da primeira balança que aparece inicialmente no enunciado, vemos que a esfera pesa mais do que o cubo:



Logo, a segunda ilustração que aparece no item a) também está correta.

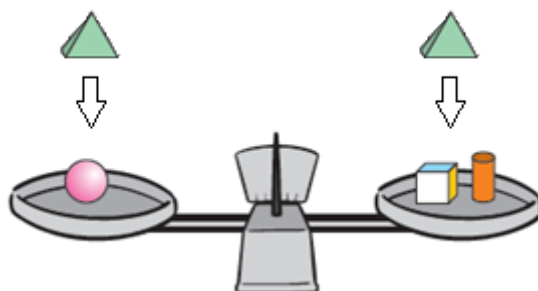


☒ Certa
☐ Errada

- b) A figura correta é a que está em equilíbrio (Figura C). Isto pode ser confirmado por meio das pesagens descritas a seguir. Partimos de



e acrescentamos uma pirâmide em cada um dos pratos:



Sabemos que uma pirâmide e um cilindro, juntos, pesam o mesmo que um cone (veja a segunda balança do enunciado). Logo, na balança acima, depois de acrescentadas as pirâmides em ambos os pratos, podemos trocar, no segundo prato, a pirâmide e o cilindro por um cone, obtendo a balança da Figura C.

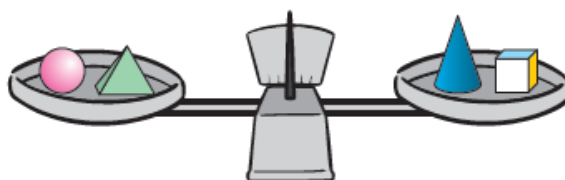
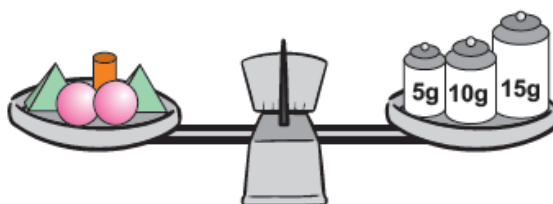
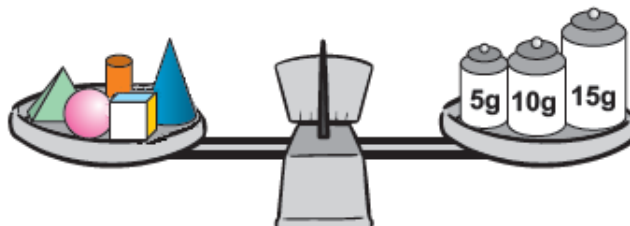


Figura C

- c) Partimos inicialmente da seguinte situação de equilíbrio:



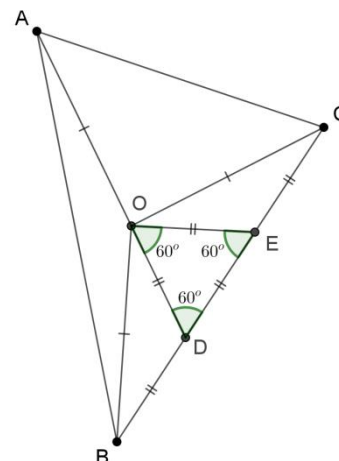
ou seja, duas pirâmides, duas esferas e um cilindro, juntos, pesam $5 + 10 + 15 = 30$ gramas. Utilizando o resultado obtido em b), podemos trocar uma esfera e uma pirâmide por um cone e um cubo, obtendo:



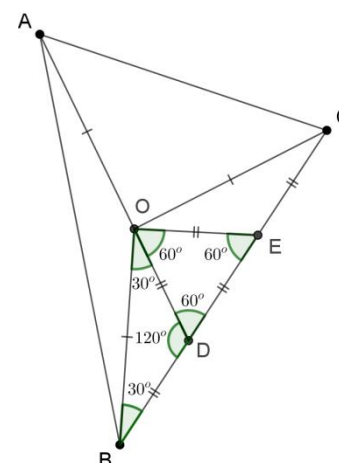
Assim, os cinco sólidos diferentes, juntos, pesam 30 gramas.

QUESTÃO 2

- a) Como $OE = OD = DE$, segue que o triângulo ODE é equilátero. Logo $m(\widehat{ODE}) = m(\widehat{OED}) = m(\widehat{ODE}) = 60^\circ$.



- b) Observe que $m(\widehat{BOE}) = m(\widehat{BOD}) + m(\widehat{DOE}) = m(\widehat{BOD}) + 60^\circ$. Por outro lado, o ângulo $\widehat{BOD}$ é um dos ângulos da base do triângulo isósceles OBD , já que $OD = BD$; além disso, o ângulo oposto à base OB desse triângulo mede 120° , já que é suplementar do ângulo $\widehat{ODE}$ que, como vimos no item anterior, mede 60° . Assim $m(\widehat{BOD}) = \frac{180^\circ - m(\widehat{BOB})}{2} = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$. Concluimos então que $m(\widehat{BOE}) = m(\widehat{BOD}) + 60^\circ = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$.

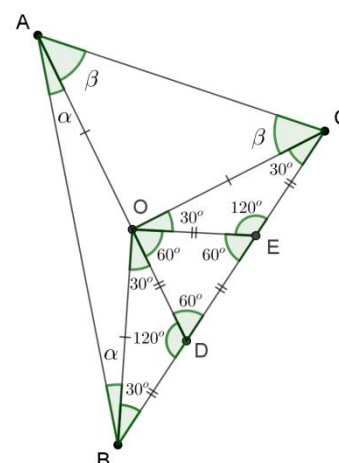


- c) Observe que $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{BAO}) + m(\widehat{OAC}) = \alpha + \beta$, como na figura ao lado. Como os triângulos OAB e OAC são isósceles, segue que $m(\widehat{ABO}) = \alpha$ e $m(\widehat{ACO}) = \beta$. Além disso, os triângulos ODB e OEC são congruentes pelo caso Lado-Ângulo-Lado, e, portanto, $m(\widehat{OEC}) = 120^\circ$, $m(\widehat{OCE}) = 30^\circ$ e $m(\widehat{COE}) = 30^\circ$. Somando os ângulos internos do triângulo ABC , temos $(\alpha + 30^\circ) + (\beta + 30^\circ) + (\alpha + \beta) = 180^\circ$. Logo $2\alpha + 2\beta = 180^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 120^\circ$ e, portanto, $m(\widehat{BAC}) = \alpha + \beta = 60^\circ$.

É fácil observar também que $\alpha = 15^\circ$ e $\beta = 45^\circ$, pois A , O e D estão alinhados.

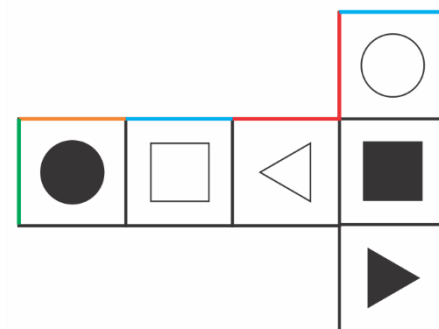
Há muitas outras soluções; uma segunda solução é a seguinte:

Observe que o triângulo ABC está inscrito na circunferência de centro O e raio OA . O ângulo central $\widehat{BOC}$ e o ângulo inscrito $\widehat{BAC}$ enxergam o mesmo arco. Como $\widehat{BOC}$ mede 120° , então $\widehat{BAC}$ mede metade, ou seja, 60° .

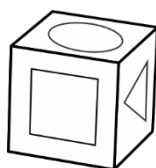
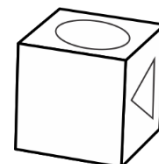


QUESTÃO 3

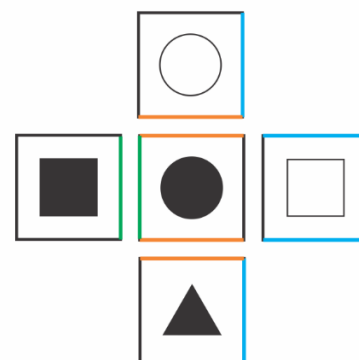
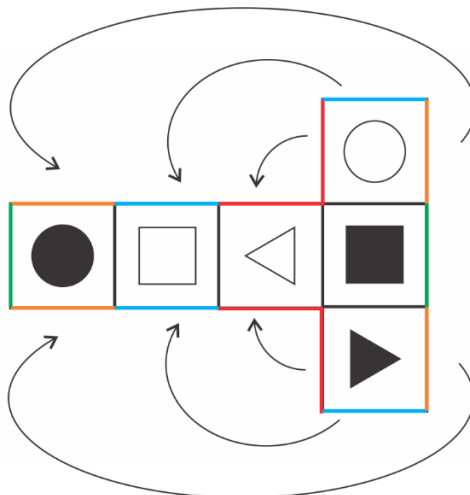
Dobrando a figura planificada para montar o cubo, vemos que o círculo preto terá uma aresta em comum com o quadrado preto e com o triângulo preto. Isso mostra que a face com o círculo branco é oposta à face com o triângulo preto, a face com triângulo branco é oposta à face com círculo preto e a face com quadrado branco é oposta à face com o quadrado preto.



a) Se o cubo for posicionado com o círculo branco na face de cima, então as faces laterais serão exatamente as quatro faces que aparecem na fila horizontal central da planificação. Logo, o triângulo branco está numa face lateral e é vizinho das faces laterais com desenhos de quadrados, um branco e um preto. O triângulo “aponta” para o quadrado branco, que então é a figura que aparece no quadrado da frente, na vista espacial do cubo. Logo, a solução é:



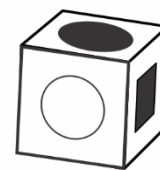
b) As faces com o círculo preto e o triângulo branco são opostas. Se a face com o círculo preto for a superior, nas faces laterais devem aparecer, além dos quadrados, o círculo branco e o triângulo preto. Como são opostas as faces com os quadrados, esses quadrados não podem aparecer numa mesma vista do cubo. Assim, nas vistas espaciais do cubo, abaixo, na face da frente só podem ser vistos o círculo branco e o triângulo preto.

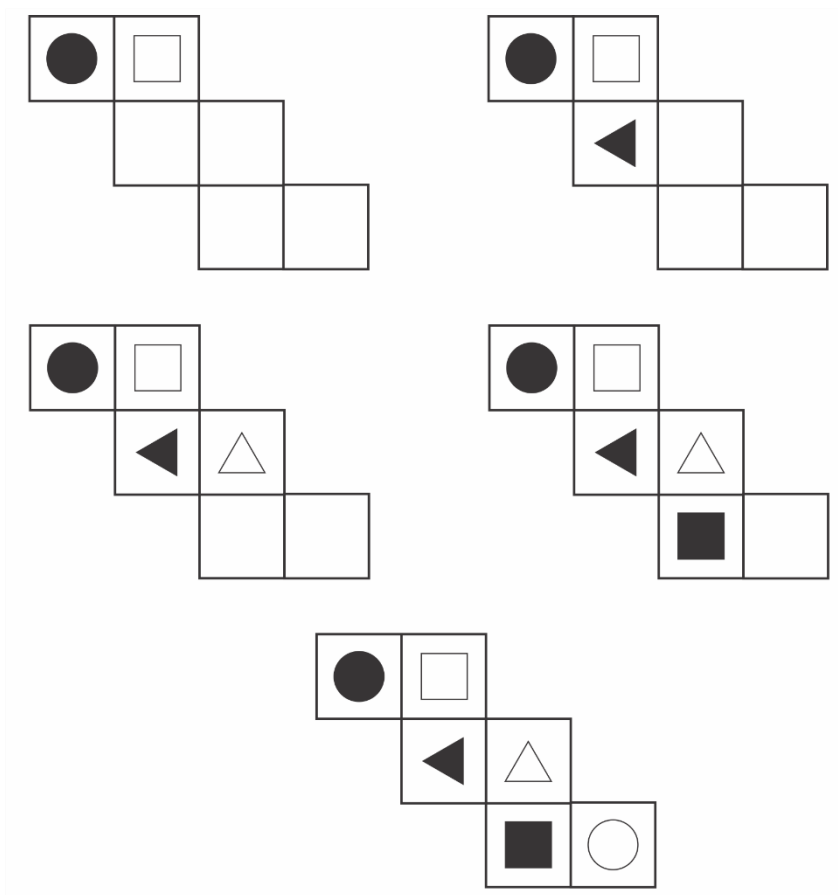


Vamos nos certificar agora da orientação do triângulo preto. Na

figura acima, à direita, vemos como se posicionam as faces laterais em que o círculo preto aparece no topo. Fica claro que, se a face lateral com o quadrado branco é visível à direita, na frente aparece o triângulo preto “apontando” para o círculo preto. As vistas são, então,

c) Na nova planificação, a face com o círculo preto fica à esquerda da face com o quadrado branco (veja a ilustração a seguir). A face abaixo da face com o quadrado branco então é a face com o triângulo preto, conforme visto no item anterior (observe que o triângulo preto deve apontar para o círculo preto no cubo montado). Então a face à direita da face com o triângulo preto é a face oposta à face do círculo preto, logo é a face com o triângulo branco. O triângulo branco deve apontar para o quadrado branco no cubo montado. A face abaixo do triângulo branco é oposta à face com o quadrado branco, logo só pode ser a face com o quadrado preto. A face que falta é a do círculo branco.





QUESTÃO 4

- a) Basta substituir n por 6 e teremos $\frac{2 \times 6}{6-2} = \frac{12}{4} = 3$.
- b) Vamos chamar de n o número que estava no visor no início. Ao apertar pela primeira vez a tecla especial, aparecerá no visor $\frac{2n}{n-2} = y$. Com a tecla especial sendo apertada mais uma vez, teremos no visor o número $\frac{2y}{y-2}$.
- Substituindo y por $\frac{2n}{n-2}$, temos que o número que aparecerá no visor é

$$\frac{2\left(\frac{2n}{n-2}\right)}{\left(\frac{2n}{n-2}\right)-2} = \frac{\frac{4n}{n-2}}{\frac{2n}{n-2}-2} = \frac{4n}{n-2-2(n-2)} = \frac{4n}{n-2-2n+4} = \frac{4n}{-n+2} = \frac{4n}{2-n} = n.$$
- c) Igualando n a $\frac{2n}{n-2}$, temos: $n^2 - 2n = 2n \Rightarrow n^2 - 4n = n(n-4) = 0$. Assim, há duas soluções: $n = 0$ e $n = 4$.
- d) Todo número diferente de 2 pode ser obtido ao apertar a tecla especial; como vimos no item b), para obter o número n diferente de 2, basta digitar o número $\frac{2n}{n-2}$. O número que nunca será obtido no visor é o 2, pois se igualarmos $\frac{2n}{n-2} = 2$, teremos $2n = 2n - 4$, ou seja, $0 = -4$, o que é impossível.

QUESTÃO 5

a)



b) Como a segunda cadeira já está ocupada, a primeira e terceira cadeiras necessariamente devem ficar livres. Assim, os demais a chegar devem ocupar, de modo quase cheio, as 5 cadeiras restantes. Como visto no enunciado, há 4 possibilidades para a ocupação dessas cadeiras.



c) Vamos enumerar as cadeiras em ordem crescente. Em uma ocupação quase cheia de 19 cadeiras, exatamente uma das duas primeiras cadeiras deve estar ocupada.

- Com a primeira cadeira ocupada (e, em consequência, a segunda livre), as demais pessoas devem ocupar, de modo quase cheio, as outras 17 cadeiras. De acordo com a tabela, há 114 possibilidades para essa ocupação.

1	X	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

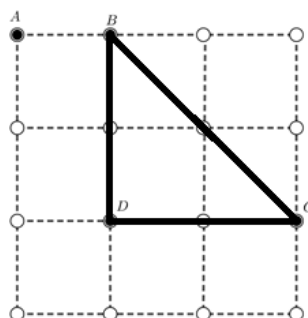
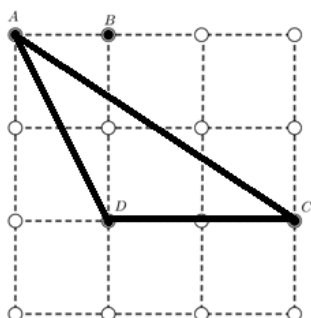
- Com a segunda cadeira ocupada (e, em consequência, as duas ao lado livres), as demais pessoas devem ocupar, de modo quase cheio, as outras 16 cadeiras. De acordo com a tabela, há 86 possibilidades para essa ocupação. Portanto, há um total de $114 + 86 = 200$ ocupações quase cheias para 19 cadeiras.

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

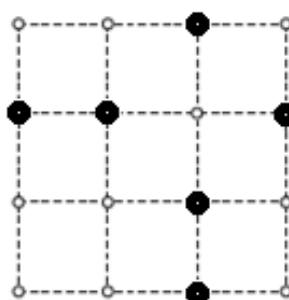
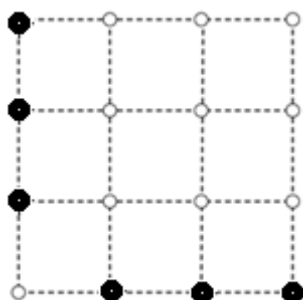
Observação: A quantidade a_n de ocupações quase cheias de n cadeiras é dada pela recorrência $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 2$ e $a_n = a_{n-2} + a_{n-3}$, para todo $n \geq 4$.

QUESTÃO 6

- a) O triângulo ACD é torto, e o triângulo BCD não é torto.



- b) Duas soluções são as seguintes:

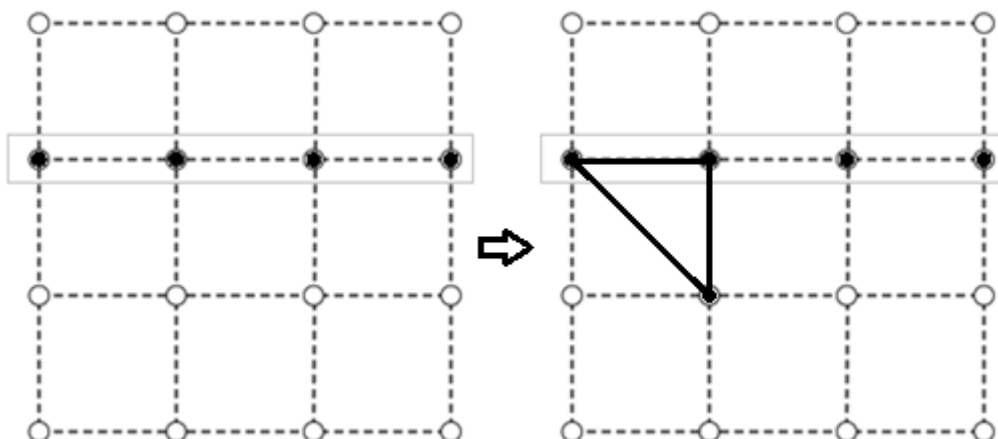


Há muitas outras soluções (por exemplo, girando ou refletindo convenientemente as soluções acima obtêm-se novas soluções).

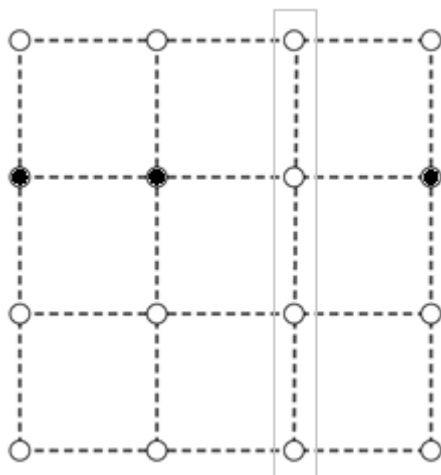
- c) Suponha que existam 7 pontos marcados no quadriculado e que qualquer triângulo com vértices em três desses pontos seja torto. Vamos mostrar que isso nos levará a uma contradição.

Como existem apenas 4 linhas, pelo menos uma delas terá no mínimo 2 pontos. Concentremos atenção nessa linha e vamos dividir nossa análise em casos.

Caso 1: Se essa linha contém 4 pontos marcados, o tabuleiro não pode possuir nenhum outro ponto marcado nas demais linhas, senão formaríamos triângulos não tortos, e isso é uma contradição. Como exemplo, observe na figura abaixo a formação de um triângulo não torto ao acrescentarmos um quinto ponto.



Caso 2: Se essa linha contém exatamente três pontos marcados, as colunas que passam por eles não podem conter outros pontos marcados, senão formaríamos triângulos não tortos. Assim, os demais 4 pontos ainda não marcados estão na coluna que não passa pelos três pontos já marcados, mas com 4 pontos marcados alinhados obtemos sempre triângulos não tortos com o auxílio de um quinto ponto, como vimos acima. Novamente chegamos a uma contradição. Veja uma situação típica:



Caso 3: Resta analisarmos a situação em que uma linha contém exatamente dois pontos, como ilustrado na figura a seguir.

Os demais $7 - 2 = 5$ pontos devem ser distribuídos nas duas colunas que não contêm esses dois pontos, senão novamente formaríamos triângulos não tortos. Assim, pelo menos uma dessas colunas terá 3 ou 4 pontos marcados. Aplicando os argumentos dos casos 1 e 2, trocando linhas por colunas, chegamos novamente a uma contradição.

Logo, independentemente de como sete pontos sejam marcados no quadriculado, sempre vai existir um triângulo que não é torto com vértices nesses pontos.

Observação: Se escolhermos $n + m - 1$ pontos (ou mais) em um quadriculado $n \times m$, então, necessariamente, 3 deles serão os vértices de um triângulo não torto.

