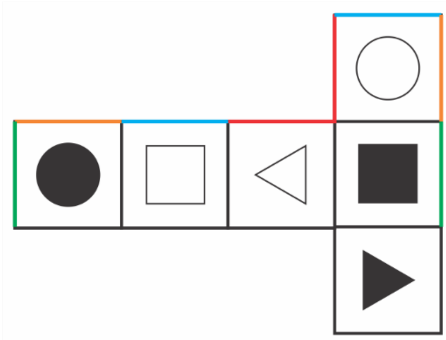
15ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS
OBMEP 2019
Somando novos talentos para o Brasil

Nível 3
Ensino Médio
2.ª Fase – 28 de setembro de 2019

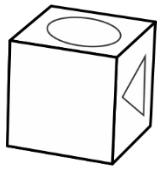
Solução da prova da 2.ª Fase

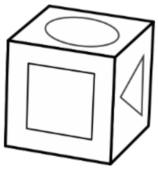
QUESTÃO 1

Dobrando a figura planificada para montar o cubo, vemos que o círculo preto terá uma aresta em comum com o quadrado preto e com o triângulo preto. Isso mostra que a face com o círculo branco é oposta à face com o triângulo preto, a face com triângulo branco é oposta à face com círculo preto e a face com quadrado branco é oposta à face com o quadrado preto.
.

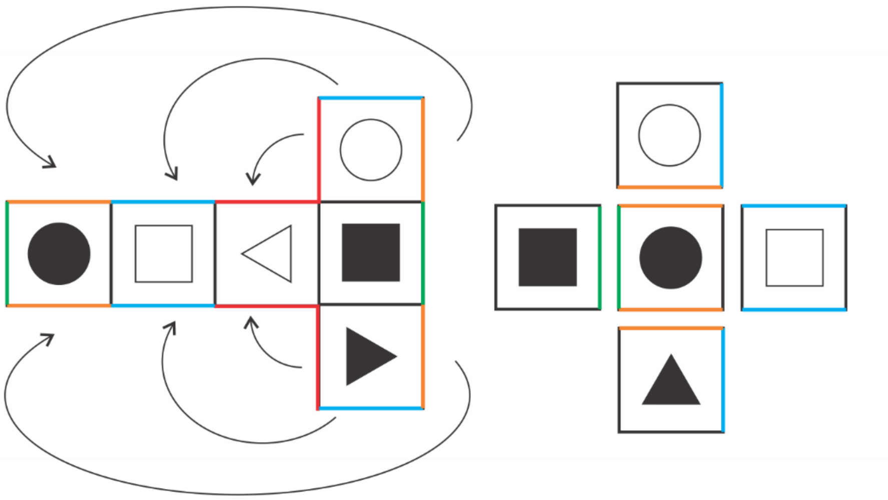


a) Se o cubo for posicionado com o círculo branco na face de cima, então as faces laterais serão exatamente as quatro faces que aparecem na fila horizontal central da planificação. Logo, o triângulo branco está numa face lateral e é vizinho das faces laterais com desenhos de quadrados, um branco e um preto. O triângulo “aponta” para o quadrado branco, que então é a figura que aparece no quadrado da frente, na vista espacial do cubo. Logo, a solução é:

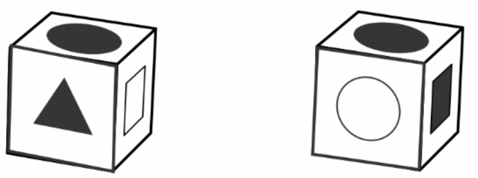




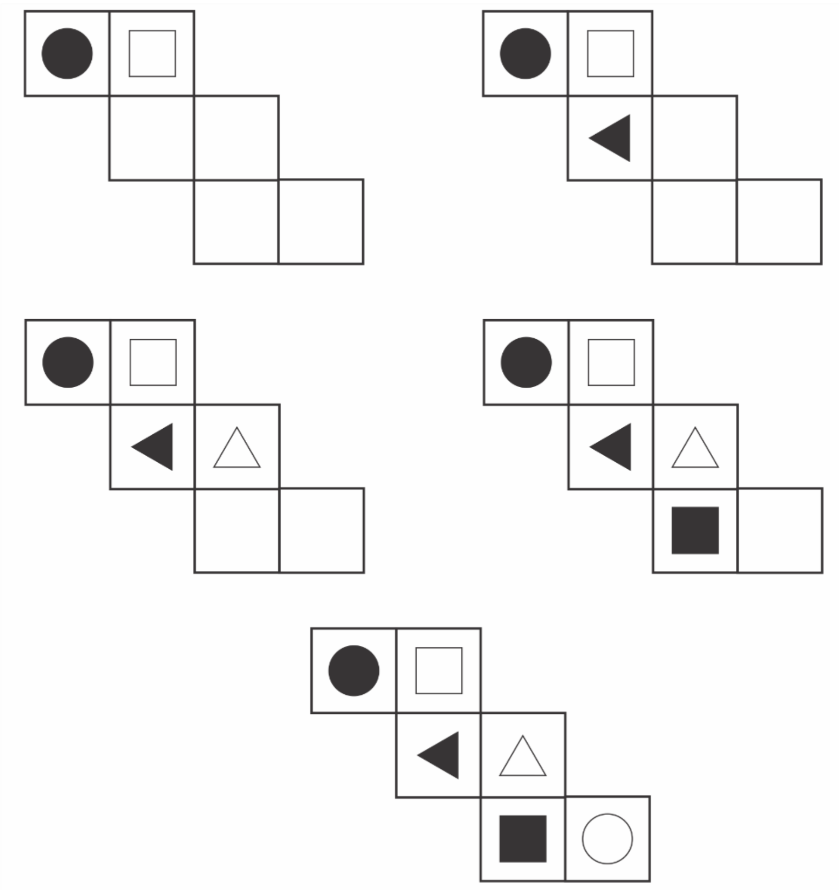
b) As faces com o círculo preto e o triângulo branco são opostas. Se a face com o círculo preto for a superior, nas faces laterais devem aparecer, além dos quadrados, o círculo branco e o triângulo preto. Como são opostas as faces com os quadrados, esses quadrados não podem aparecer numa mesma vista do cubo. Assim, nas vistas espaciais do cubo, abaixo, na face da frente só podem ser vistos o círculo branco e o triângulo preto.



Vamos nos certificar agora da orientação do triângulo preto. Na figura acima, à direita, vemos como se posicionam as faces laterais em que o círculo preto aparece no topo. Fica claro que, se a face lateral com o quadrado branco é visível à direita, na frente aparece o triângulo preto “apontando” para o círculo preto. As vistas são, então,



c) Na nova planificação, a face com o círculo preto fica à esquerda da face com o quadrado branco (veja a ilustração a seguir). A face abaixo da face com o quadrado branco então é a face com o triângulo preto, conforme visto no item anterior (observe que o triângulo preto deve apontar para o círculo preto no cubo montado). Então a face à direita da face com o triângulo preto é a face oposta à face do círculo preto, logo é a face com o triângulo branco. O triângulo branco deve apontar para o quadrado branco no cubo montado. A face abaixo do triângulo branco é oposta à face com o quadrado branco, logo só pode ser a face com o quadrado preto. A face que falta é a do círculo branco.



QUESTÃO 2

a) Basta substituir n por 6 e teremos $\frac{2\times 6}{6-2} = \frac{12}{4} = 3$.

b) Vamos chamar de n o número que estava no visor no início. Ao apertar pela primeira vez a tecla especial, aparecerá no visor $\frac{2n}{n-2} = \mathrm{y}$. Com a tecla especial sendo apertada mais uma vez, teremos no visor o número $\frac{2\mathrm{y}}{\mathrm{y}-2}$. Substituindo y por $\frac{2n}{n-2}$, temos que o número que aparecerá no visor é

$$\frac{2\left(\frac{2n}{n-2}\right)}{\left(\frac{2n}{n-2}\right)-2} = \frac{\frac{4n}{n-2}}{\frac{2n}{n-2}-2} = \frac{4n}{4} = n.$$

c) Igualando n a $\frac{2n}{n-2}$, temos: $n^2 - 2n = 2n \Longrightarrow n^2 - 4n = n(n-4) = 0$. Assim, há duas soluções: $n = 0$ e $n = 4$.

d) Todo número diferente de 2 pode ser obtido ao apertar a tecla especial; como vimos no item b), para obter o número n diferente de 2, basta digitar o número $\frac{2n}{n-2}$. O número que nunca será obtido no visor é o 2, pois se igualarmos $\frac{2n}{n-2} = 2$, teremos $2n = 2n - 4$, ou seja, $0 = -4$, o que é impossível.

QUESTÃO 3

a) 1a solução (baseada em contagem)
Existem $3^4 = 81$ possibilidades do jogo. Ana deve receber as bolas de Beatriz, de Cláudia e de Diana e deve jogar sua bola para uma dessas três amigas; logo a probabilidade de Ana receber três bolas é $\frac{3}{81} = \frac{1}{27}$.

2ª. solução:
Para que Ana receba três bolas, todas as outras três amigas devem necessariamente mandar sua bola para ela. Note que cada garota pode mandar a bola para uma dentre três possíveis pessoas. Assim, a probabilidade de que Beatriz mande a bola para Ana é $\frac{1}{3}$. Empregando o mesmo raciocínio, percebemos que a probabilidade de que Cláudia mande a bola para Ana é $\frac{1}{3}$ e de que Diana mande a bola para Ana também é $\frac{1}{3}$. Todos esses lançamentos são independentes, isto é, o resultado de um lançamento não afeta o resultado de outro lançamento. Assim, a probabilidade de Ana receber as três bolas será de $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} . \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$.

b) 1ª. Solução (baseada em contagem)
Existem $3^4 = 81$ possibilidades do jogo. Em 18 desses jogos Ana recebe exatamente 2 bolas. De fato, se Beatriz é a única que não joga sua bola para Ana, há 6 possibilidades de jogo, pois Beatriz deve jogar sua bola para Cláudia ou para Diana, e Ana pode jogar sua bola para qualquer uma de suas três amigas (são 6 as possibilidades de jogo nesse caso). O mesmo ocorre se Cláudia for a única que não joga sua bola para Ana (outras 6 possibilidades) e também se Diana for a única que não joga sua bola para Ana (mais 6 possibilidades). Logo a probabilidade de que Ana receba exatamente duas bolas é $\frac{18}{81} = \frac{2}{9}$.

2ª. Solução:
Vamos calcular inicialmente a probabilidade de que Ana receba a bola de Beatriz e Cláudia, mas não receba a bola de Diana. Observe que a probabilidade desse evento é $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} . \frac{2}{3} = \frac{2}{27}$ uma vez que Diana não entrega a bola a Ana. Note ainda que também devemos considerar o evento no qual Beatriz é a única que não manda a bola para Ana e o evento no qual Cláudia é a única que não manda a bola para Ana. Estes dois eventos também possuem probabilidade igual a $\frac{2}{27}$ pelo mesmo raciocínio utilizado para encontrarmos a probabilidade do primeiro evento analisado neste item. Assim, a probabilidade de Ana receber exatamente duas bolas é

$$\frac{2}{27} + \frac{2}{27} + \frac{2}{27} = \frac{2}{9}.$$

c) 1ª. Solução (baseada em contagem)
Existem $3^4 = 81$ possibilidades do jogo. Novamente vamos calcular o número de casos favoráveis. Observa-se que a primeira criança C1 tem 3 possibilidades de para quem jogar a bola. Seja C2 a criança que recebeu a bola de C1 e observe que C2 também tem 3 possibilidades para jogar sua bola. Agora, as outras duas crianças, C3 e C4, têm apenas uma opção cada, pois se C2 jogou a sua bola para C1, necessariamente C3 deve jogar a bola para C4 e vice versa. Na possibilidade de C2 ter jogado a sua bola para C3 ou C4 (digamos C3), então C3 terá que necessariamente jogar para C4 que por sua vez devolve para C1. Pelo princípio multiplicativo, as possibilidades favoráveis são 3.3.1.1 = 9. Logo, a probabilidade de que cada menina receba uma bola é

$$\frac{9}{81} = \frac{1}{9}$$

Uma variação dessa solução é a seguinte:

Cada uma das quatro garotas pode passar a bola para uma dentre três de suas amigas. Assim, pelo princípio multiplicativo, temos um total de $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 81$ configurações diferentes resultantes, após tocar o sinal. Agora iremos calcular quantas dessas configurações são tais que cada garota fique com uma bola no final. Chamaremos essas configurações de desejáveis. Veja que Ana tem três opções para mandar sua bola para alguém. A pessoa que receber a bola de Ana também terá três opções, porém vamos separar essa opção em dois casos:

Caso 1: Essa pessoa manda sua bola para Ana. Nesse caso, as outras duas pessoas deverão trocar suas bolas entre si (há 3 possibilidades nesse caso).

Caso 2: Essa pessoa manda sua bola para uma terceira pessoa. Nesse caso, essa terceira pessoa deverá enviar (necessariamente) sua bola para a quarta pessoa. Caso contrário, alguém iria receber mais de uma bola ou alguém ficaria sem receber bola. Note ainda que essa quarta pessoa deverá enviar sua bola necessariamente para Ana.

Nesse caso, há 3 x 2 = 6 possibilidades.
Logo, temos um total de $3+6=9$ configurações desejáveis. Portanto, a probabilidade de uma delas surgir é de $\frac{9}{81}=\frac{1}{9}$.

2ª. Solução:
Dividimos em dois casos que dependem de para onde a segunda pessoa joga a bola, se de volta para a primeira pessoa ou se para outra pessoa.
A probabilidade do primeiro caso ocorrer é de $\frac{1}{3}$ e, dentro desse caso, a probabilidade de que, ao final, todas as meninas estejam com uma bola é de $\frac{1}{3}.\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$.
A probabilidade do segundo caso ocorrer é de $\frac{2}{3}$, e, dentro desse caso, a probabilidade de que ao final todas as meninas estejam com uma bola, também é de $\frac{1}{3}.\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$. Assim, podemos calcular a probabilidade desejada diretamente:

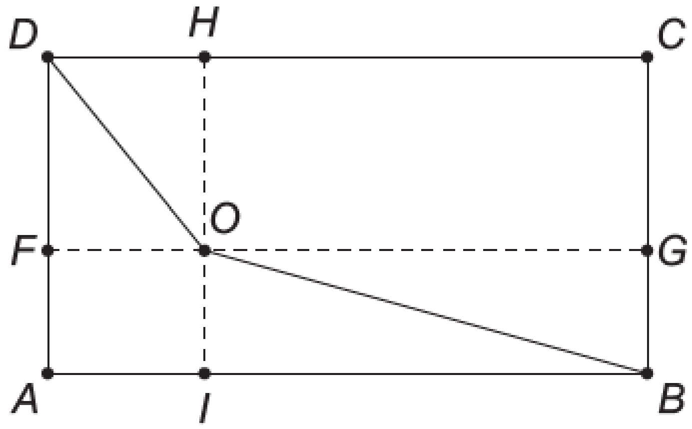
$$\frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{1}{3}+\frac{2}{3}.\frac{1}{3}.\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$$

Há muitas outras formas de calcular as probabilidades, uma delas usa o número de permutações caóticas para se obter o número de caos favoráveis:

$$d_4=4!\left(\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}\right)=9.$$

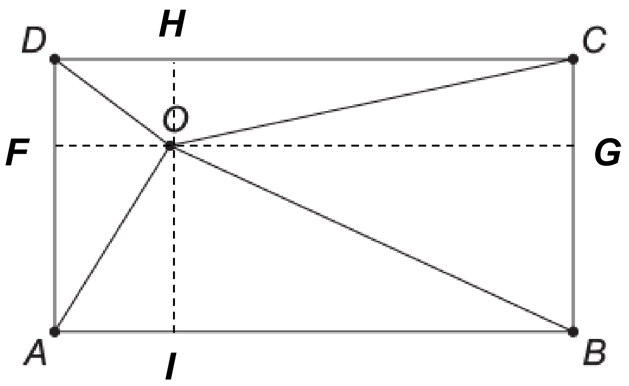
QUESTÃO 4

a)



Pelo Teorema de Pitágoras, temos: $OD^2 = OF^2 + FD^2 = OF^2 + OH^2$ e, da mesma forma, $OB^2 = OG^2 + GB^2 = OG^2 + OI^2$. Assim,
$OD^2 + OB^2 = OF^2 + OH^2 + OG^2 + OI^2 = 4 + 9 + 36 + 1 = 50$.

b) Observemos a figura a seguir onde estão traçados os segmentos *HI* e *FG,* perpendiculares aos lados *AB* e *BC,* respectivamente.

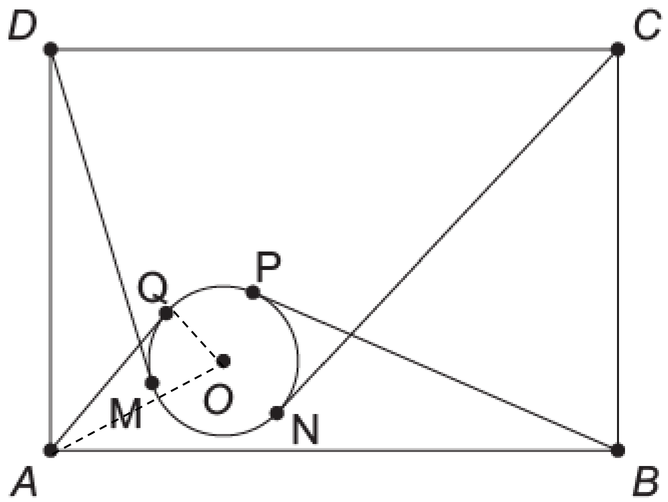


De forma similar ao item a), usando o Teorema de Pitágoras, obtemos as igualdades:

1) $OD^2 + OB^2 = OF^2 + OH^2 + OG^2 + OI^2$,
2) $OA^2 + OC^2 = OF^2 + OI^2 + OH^2 + OG^2$,

de onde decorre a igualdade $OA^2 + OC^2 = OD^2 + OB^2$.

c)



De acordo com o item b), temos que

$$(1)\ OA^2 + OC^2 = OD^2 + OB^2.$$

Por outro lado, denotando por R o raio do círculo e usando propriedades de tangência ao círculo, valem as relações:

$$(2)\ OA^2 = AQ^2 + R^2,$$
$$(3)\ OC^2 = NC^2 + R^2,$$
$$(4)\ OD^2 = MD^2 + R^2,$$
$$(5)\ OB^2 = PB^2 + R^2.$$

Finalmente, substituindo as igualdades (2), (3), (4) e (5) em (1), obtemos
$AQ^2 + R^2 + NC^2 + R^2 = MD^2 + R^2 + PB^2 + R^2$, de onde segue que

$$AQ^2 = -NC^2 + MD^2 + PB^2 = -100 + 49 + 64 = 13.$$

Portanto, $AQ = \sqrt{13}$.

Observação: O resultado obtido mostra que, independentemente do raio do círculo, conhecendo-se três das quatro medidas *AQ*, *BP*, *CN* e *DM,* podemos determinar a que falta.

QUESTÃO 5

a)

A	B	A
C	D	C
A	B	A

A	B	C
C	D	A
A	B	C

A	B	A
C	D	C
B	A	B

b) No caso 2 x 8, uma vez escritas as letras nas quatro casas do primeiro quadrado 2 x 2 da esquerda, cada coluna seguinte pode ser preenchida de 2 modos; logo, há $4!\ 2^6 = 1536$ modos de preenchimento.

c) Vamos ao tabuleiro 8 x 8. Fixemos momentaneamente um preenchimento do quadrado 2 x 2 superior esquerdo. Vimos em b) que há $2^6 = 64$ maneiras diferentes de se preencherem as duas primeiras linhas do tabuleiro 2 x 8, mantendo o preenchimento do quadrado superior esquerdo 2 x 2 que fixamos.

Dentre essas 64 possibilidades, uma delas é tal que na primeira linha do tabuleiro aparecem apenas duas letras que se alternam. Nesse caso, a segunda linha também tem alternância de duas letras em seu preenchimento, e essa alternância está determinada de modo único devido ao preenchimento do quadrado superior esquerdo 2 x 2 que fixamos inicialmente. Assim, nesse caso, nas demais 6 linhas também deve ocorrer alternância de duas letras e, portanto, há $2^6 = 64$ possibilidades de preenchimento.

Nos outros 63 casos (em que não há alternância de duas letras na primeira linha), estando as duas primeiras linhas do tabuleiro corretamente preenchidas, há um único preenchimento para as demais linhas.

Logo, há $64 + 63 = 2^6 + 2^6 - 1 = 2^7 - 1 = 127$ possibilidades de preenchimento, uma vez fixado o quadrado o preenchimento do quadrado superior esquerdo 2 x 2. Como esse quadrado pode ser preenchido de 4! formas distintas, o tabuleiro 8 x 8 pode ser preenchido de $4! \times 127 = 3048$ maneiras diferentes.

QUESTÃO 6

a)

Distribuição de livros	A	B	C	D	E	F
No início	1	2	3	4	5	6
Após o 1º dia	1	4	3	2	5	6
Após o 2º dia	4	1	5	2	3	6

Trocas: B ↔ D

Trocas: A ↔ B e C ↔ E

b)

Distribuição de livros	A	B	C	D	E	F
No início	1	2	3	4	5	6
Após o 1º dia	6	5	4	3	2	1
Após o 2º dia	6	1	2	3	4	5

Trocas: A ↔ F, B ↔ E e C ↔ D

Trocas: B ↔ F e C ↔ E

Além dessa maneira, existem outras formas diferentes de preenchimento:

Distribuição de livros	A	B	C	D	E	F
No início	1	2	3	4	5	6
Após o 1º dia	5	4	3	2	1	6
Após o 2º dia	6	1	2	3	4	5

Trocas: A ↔ E, B ↔ D

Trocas: A ↔ F B ↔ E e C ↔ D

Distribuição de livros	A	B	C	D	E	F
No início	1	2	3	4	5	6
Após o 1º dia	4	3	2	1	6	5
Após o 2º dia	6	1	2	3	4	5

Trocas: A ↔ D, B ↔ C e E ↔ F

Trocas: A ↔ E e B ↔ D

Distribuição de livros	A	B	C	D	E	F
No início	1	2	3	4	5	6
Após o 1º dia	3	2	1	6	5	4
Após o 2º dia	6	1	2	3	4	5

Trocas: A ↔ C, D ↔ F

Trocas: A ↔ D B ↔ C e E ↔ F

Distribuição de livros	A	B	C	D	E	F
No início	1	2	3	4	5	6
Após o 1º dia	2	1	6	5	4	3
Após o 2º dia	6	1	2	3	4	5

Trocas: A ↔ B, C ↔ F e D ↔ E

Trocas: A ↔ C D ↔ F

Distribuição de livros	A	B	C	D	E	F
No início	1	2	3	4	5	6
Após o 1º dia	1	6	5	4	3	2
Após o 2º dia	6	1	2	3	4	5

Trocas: B ↔ F, C ↔ E

Trocas: A ↔ B C ↔ F e D ↔ E

c) Em uma configuração qualquer, podemos "acompanhar" para onde vai o livro de um dado estudante, e os livros subsequentes. Por exemplo, no item a) temos que "o livro de A vai para B, o livro de B vai para D, e o livro de D vai para A". Note que, como o número de estudantes é finito, esse "acompanhamento" sempre volta ao ponto de onde começamos. A isso chamaremos de "ciclo". Diremos que o "tamanho" do ciclo é o número de estudantes envolvidos. No exemplo citado do item a), temos um ciclo de tamanho 3.

Podemos mostrar que uma configuração qualquer consiste de vários ciclos: escolha um estudante e encontre o ciclo ao qual ele pertence. Remova esses estudantes e repita o processo. Como, a cada passo, diminuímos o número de estudantes em pelo menos uma unidade e como o número de estudantes é finito, o processo termina. Temos, assim, uma “coleção de ciclos disjuntos”.

Para mostrar que qualquer configuração pode ser obtida em 2 dias, temos que mostrar que um ciclo de qualquer tamanho entre 1 e 6 pode ser obtido após duas sequências de trocas.

Para isto, basta analisar, sem perda de generalidade, o ciclo que, após o segundo dia, tem a configuração

n,1, 2, ... n-2, n-1,

(o qual chamaremos de ciclo *padrão* de tamanho n), n = 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Isto pode ser feito, por exemplo, da seguinte maneira:

- No primeiro dia, trocamos números opostos em relação ao centro da linha 1, 2, .., n.
- No segundo dia, fixamos o primeiro número obtido (n) e trocamos os números opostos em relação ao centro da linha restante obtida após retirarmos esse primeiro número.

Para esclarecer melhor, vamos detalhar esse procedimento para ciclos de diversos tamanhos.

Para um ciclo de tamanho 1 não há nada a fazer, o estudante mantém o livro por dois dias.

Para um ciclo de tamanho 2, uma troca basta: o livro de A vai para B, e o livro de B vai para A.

Analisemos os casos restantes possíveis, os ciclos de tamanho 3, 4, 5 e 6.

Ciclo de tamanho 3:
Abaixo está um exemplo típico de um ciclo (padrão) de tamanho 3 e de como obtê-lo fazendo trocas em dois dias:

	A	B	C			
Livros no início	1	2	3			
Trocas: $A \leftrightarrow C$						
Livros após dia 1	3	2	1			
Trocas: $B \leftrightarrow C$						
Livros após dia 2	3	1	2			

Ciclo de tamanho 4:
Abaixo está um exemplo típico de um ciclo (padrão) de tamanho 4 e de como obtê-lo fazendo trocas em dois dias:

	A	B	C	D		
Livros no início	1	2	3	4		
Trocas: $A \leftrightarrow D$ e $B \leftrightarrow C$						
Livros após dia 1	4	3	2	1		
Trocas: $B \leftrightarrow D$						
Livros após dia 2	4	1	2	3		

Ciclo de tamanho 5:
Abaixo está um exemplo típico de um ciclo (padrão) de tamanho 5 e de como obtê-lo fazendo trocas em dois dias:

	A	B	C	D	E	
Livros no início	1	2	3	4	5	
Trocas: $A \leftrightarrow E$ e $B \leftrightarrow D$						
Livros após dia 1	5	4	3	2	1	
Trocas: $B \leftrightarrow E$ e $C \leftrightarrow D$						
Livros após dia 2	5	1	2	3	4	

Ciclo de tamanho 6:
Abaixo está um exemplo típico de um ciclo (padrão) de tamanho 6 e de como obtê-lo fazendo trocas em dois dias (é o primeiro exemplo que apresentamos na solução do item b)

	A	B	C	D	E	F
Livros no início	1	2	3	4	5	6
Trocas: $A \leftrightarrow F$, $B \leftrightarrow E$ e $C \leftrightarrow D$						
Livros após dia 1	6	5	4	3	2	1
Trocas: $B \leftrightarrow F$ e $C \leftrightarrow E$						
Livros após dia 2	6	1	2	3	4	5

Portanto, qualquer que seja a configuração final, podemos obtê-la após 2 dias de trocas.

Generalização:

Note que essa análise é válida para qualquer número de estudantes: em um grupo de n estudantes, podemos obter uma configuração qualquer de livros entre eles após trocas realizadas em apenas 2 dias.

Para mostrar o caso geral de um ciclo padrão de tamanho n, vamos denotar os estudantes por A_1, A_2, …, A_n. Inicialmente eles têm os livros 1, 2, …, n.

No primeiro dia o estudante A_k troca de livro com o estudante A_{n-k+1}. Se, para algum k, ocorrer que k = n – k + 1, esse estudante mantém seu livro (esse caso acontece para todo n ímpar). No segundo dia, o estudante A_1 não troca com ninguém e, para k de 2 a n, o estudante A_k troca de livro com o estudante A_{n-k+2}.

Assim, após o primeiro dia, o estudante A_1 está com o livro n, e, para k entre 2 e n, o estudante A_k está com o livro n – k + 1. Após o segundo dia o estudante A_k está com o livro que $A_{n-k+2} = A_{n-(k-1)+1}$ recebeu depois do primeiro dia, isto é, com o livro k – 1, e o ciclo padrão de tamanho n está completo.